



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

PROYECTO FIN DE CARRERA

DETECCIÓN DE GRIETAS EN PLACAS CON TÉCNICAS MULTIFRECUENCIA

AERnnova
engineering

AUTOR: RAÚL SERRANO SÁEZ

TUTORA: MARÍA LUISA RAPÚN BANZO

Octubre 2014

Abstract

Safety is one of the most important feature in the aviation industry, and this involves too many factors. One of these is the aircraft maintenance. Over time, the procedures have been changing, and improving themselves. Non Destructive Testing (NDT) appeared in the late 19th century as a great option, because it enabled to inspect any structure without damaging it. Nowadays, there are several kinds of NDT, but ultrasound is one of the most widely used. This Master Thesis is devoted to an innovative ultrasound technique for crack detection. A technique, whose main aim lies in getting a good location of defects from a few measures, breaking with the currently widespread methods, as phased array. It is not necessary to use trains of waves, only discrete excitations, which means a great saving of time and energy. This work is divided into two steps: the first is to develop a multiphysics simulator, which is able to solve linear elasticity 3D problems (via Finite Element Method, FEM). This simulator allows to obtain in a computationally efficient way the displacement field for different frequencies and excitations. The solution of this elastic problem is needed to be used in the second step, which consists of generating a code that implements a mathematical tool named topological derivative, allowing to locate defects in the studied domain. In this work, the domain is a plate, and the defect is a hidden spherical void. The simulator has been developed using open source software (Elmer, Gmsh, . . .), achieving a highly versatile simulator, which allows to change the configuration easily: domain size and shape, number and position of transducers, etc. Just one comercial software is used, MatlabTM. It is used to implement the topological derivative. In this work, the performance of the method is tested in several examples comparing the results when one or more frequencies are considered for different configurations of emisors/receptors.

Agradecimientos

Estas líneas resultan ser el último paso de una carrera que comenzó en el año 2008, con un objetivo claro: conseguir llegar a ser Ingeniero Aeronáutico. Desde aquél entonces las cosas han cambiado mucho, pero las personas que verdaderamente han querido estar ahí, lo siguen estando. Para todas esas personas: MUCHAS GRACIAS.

Pensando en la elaboración de este proyecto me vienen a la cabeza muchas cosas, pero sobre todo muchas personas. Durante este período he recibido un apoyo, sin el cual, no hubiera sido posible realizar lo que a continuación se lee en estas hojas. Debo comenzar citando a mi tutora, María Luisa Rapún Banzo, una persona que desde el minuto cero confió en mí para desarrollar este proyecto. Su continua dedicación, profesionalidad y paciencia han hecho posible todo esto. También tengo que incluir en estas líneas a dos personas que han sabido completar mis conocimientos en muchos campos, y mostrarme el camino cuando todo parecía oscuro. El primero de ellos es José Manuel Vega de Prada, quien con su inmensa experiencia y forma de trabajar ha aportado grandes cosas a este proyecto. El segundo, pero no menos importante, es Fernando Varas Mérida, quien se encontró de rebote con un muchacho preguntón a quien jamás le volvió la espalda. También debo agradecer a Aernnova Engineering la gran oportunidad que ha brindado mediante la financiación de este proyecto.

Sin ningún lugar a dudas, este proyecto no estaría completo sin nombrarle a él, Ezequiel Santamaría Pardo, quien fue mi mentor desde que apenas comencé a jugar con “problemillas” de matemáticas. Sé que estarías muy orgulloso de todo lo que he conseguido.

A mis amigos no cabe otra forma de agradecerles todo lo que me han apoyado que dedicándoles una parte de estos agradecimientos. Aunque parecía que esto no se iba a acabar nunca, ya lo ha hecho. Y como no, citar aquí a mi pareja, quien ha vivido tanto como yo lo que ha sido este proyecto. Lo hemos conseguido.

No podía finalizar este apartado sin mencionar a las personas más importantes de mi vida: mis padres. Quienes desde la lejanía han sentido tanto como yo las penas y alegrías que han surgido durante todos estos años. Jamás podré devolveros todo lo que habéis hecho por mí. Este proyecto es tan vuestro como mío.

RAÚL SERRANO SÁEZ

Índice

1. Introducción	11
1.1. Descripción del problema	11
1.2. Objetivos del proyecto fin de carrera	12
1.3. Antecedentes	13
1.3.1. Tipos de ensayos no destructivos	13
1.3.2. Ondas de Lamb	14
1.3.3. Métodos de medición	14
1.3.3.1. Pulso-Eco	15
1.3.3.2. Emisor-Receptor	15
1.3.4. SHM (Structural Health Monitoring)	16
1.3.5. Aernnova Engineering	20
2. Formulación de los problemas modelo directo e inverso	25
2.1. Ultrasonidos	25
2.2. Ondas de Lamb	26
2.3. Formulación de la ecuación de Navier-Cauchy	29
2.4. Formulación del problema modelo	31
2.5. Problema inverso	33
3. Sensibilidad Topológica	35
3.1. Introducción	35
3.2. Derivada topológica para la detección de defectos	36
3.3. Definición de derivada topológica y fórmula para el problema modelo	37
4. Simulación numérica	41
4.1. Descripción del Método de los Elementos Finitos (FEM)	41
4.2. Formulación variacional del problema modelo	42
4.3. MEF aplicado al problema modelo	42
4.4. Resolución del sistema de ecuaciones	44
4.5. Frecuencias propias	47
5. Software	51
5.1. FreeFem++	52
5.2. Gmsh	58
5.3. Elmer	64
5.4. ParaView	66
5.5. Python	67
5.6. Matlab TM	68
6. Resultados	69
6.1. Comprobación del correcto funcionamiento y comunicación entre los distintos software utilizados	69
6.2. Simulación de datos experimentales	70
6.3. Resolución de problemas con y sin defectos	74

6.4.	Detección de defectos utilizando la derivada topológica	79
6.4.1.	Derivada topológica para una frecuencia de 2000 Hz	79
6.4.2.	Derivada topológica para una frecuencia de 1000 Hz	82
6.4.3.	Multifrecuencia	83
7.	Conclusiones	87
8.	Trabajos futuros	89

Lista de Figuras

1.	Selección de sistemas de mantenimiento	12
2.	Método Pulso-Eco	15
3.	Método Emisor-Receptor	16
4.	Estructura SHM	17
5.	Tipos de SHM	20
6.	Esquema de monitorización PAMELA SHM	21
7.	Transductor PhA III integrado	22
8.	PAMELA GUI	23
9.	Comparativa SHM	23
10.	Longitud de onda vs Defecto	26
11.	Tipos de ondas	28
12.	Dominio del problema directo	31
13.	Configuración de palpadores	33
14.	Optimización de un puente	35
15.	Ejemplo de la reconstrucción de un objeto utilizando derivadas topológicas	36
16.	Derivada topológica multifrecuencia en un problema acústico	37
17.	Representación geométrica del cálculo de derivadas topológicas	38
18.	Estimación del número de modos necesario	47
19.	Frecuencias propias	48
20.	Flujo de datos	51
21.	FreeFem++	53
22.	Solución gráfica del Problema de Lamé	57
23.	Tipos de mallas	59
24.	Gmsh	62
25.	Elmer	65
26.	Fichero de entrada de Elmer	66
27.	ParaView	67
28.	Solución numérica vs Solución analítica	70
29.	Geometría de nuestra placa con palpadores puntuales	71
30.	Esquema para la calibración de mallas	72
31.	Esquema de excitación para evaluar zonas de la placa	75
32.	$u_1 = u_1 \text{ sin defecto} - u_1 \text{ con defecto}$	76
33.	$u_2 = u_2 \text{ sin defecto} - u_2 \text{ con defecto}$	77
34.	$u_3 = u_3 \text{ sin defecto} - u_3 \text{ con defecto}$	78
35.	Derivada topológica en función de los emisores (2000 Hz)	80
36.	Suma de la derivada topológica para cuatro emisores individuales (2000 Hz)	81
37.	Suma de la derivada topológica para siete emisores individuales (2000 Hz)	82
38.	Suma de la derivada topológica para cuatro emisores individuales (1000 Hz)	83
39.	Ensayo multifrecuencia	84

Lista de Tablas

1.	Tipos de ensayos no destructivos	14
2.	Características de los clústers	52
3.	C.C. Sistema de Lamé	55
4.	Características MEF - Problema de Lamé	55
5.	Desplazamientos del Problema de Lamé	56
6.	Dimensiones vs Elementos de mallado	58
7.	Características del mallado de la Figura 24	62
8.	Valoración de métodos de mallado	63
9.	Frecuencias propias de Ω y $\Omega \setminus D$ (Hz)	72
10.	Convergencia del campo de desplazamientos (2000 Hz - Placa sin defecto)	73
11.	Errores relativos dependientes de la malla (2000 Hz - Placa sin defecto)	73
12.	Convergencia del campo de desplazamientos (1000 Hz - Placa sin defecto)	73
13.	Errores relativos dependientes de la malla (1000 Hz - Placa sin defecto)	73
14.	Convergencia del campo de desplazamientos (2000 Hz - Placa con defecto)	74
15.	Errores relativos dependientes de la malla (2000 Hz - Placa con defecto)	74
16.	Convergencia del campo de desplazamientos (1000 Hz - Placa con defecto)	74
17.	Errores relativos dependientes de la malla (1000 Hz - Placa con defecto)	74

1. Introducción

1.1. Descripción del problema

El problema global a resolver consiste en la detección de defectos en placas metálicas aproximadamente isótropas. Éste es un objetivo ciertamente ambicioso por la forma en la cual se quiere llevar a cabo. Las pretensiones principales consisten en la detección a partir de un número muy reducido de datos, recogidos a través de una serie de piezoeléctricos colocados en la placa. En este proyecto se presentará la primera fase, consistente en un simulador para resolver problemas de elasticidad lineal en 3D, que permite de una forma computacionalmente eficiente simular distintas frecuencias y excitaciones. Este simulador permitirá posteriormente detectar las grietas con la simple introducción de unos datos de medición reales, junto con las características propias del medio de propagación: constantes elásticas, dimensiones... El simulador es la base fundamental de todos los ensayos posteriores.

Este proyecto fin de carrera se incluye dentro de los denominados *Ensayos No Destructivos*. Estos ensayos se han ido haciendo un hueco importantísimo dentro de la industria, por lo cual, sus métodos se encuentran en continuo desarrollo. Este tipo de actividad se encuentra incluido en grandes procesos de producción y mantenimiento, ya que supone un método eficiente y relativamente económico para lograr una buena supervisión estructural, y un buen indicador de las posibles tareas de mantenimiento que se puedan acarrear por el deterioro de los productos fabricados.

El proyecto se lleva a cabo en vistas a una industria concreta, la aeronáutica. Por ello se realiza el estudio para placas metálicas y de pequeño espesor, características propias de las piezas que conforman la fabricación de diferentes partes de un avión: alas, fuselaje... Como es bien sabido, ya desde hace algunos años han irrumpido con fuerza en la industria aeronáutica los materiales compuestos, hasta el nivel de llegar a suponer más del 50 % de algunos aviones. Tal es el caso del bien conocido Airbus A350, el cual está formado aproximadamente por un 52 % de composites. Por ello resulta importante destacar de nuevo el carácter metálico de las placas empleadas en este proyecto, ya que el estudio para materiales compuestos sería motivo de otro estudio diferente. Pese a la aceptación de los materiales compuestos como firmes candidatos a sustituir la presencia de materiales metálicos en los aviones, también resulta cierto que en la actualidad existen ciertas limitaciones que impiden, por el momento, que los metales sean completamente eliminados de las estructuras aeronáuticas, permitiendo así que nuevos desarrollos para la realización de ensayos no destructivos tengan una gran cabida aún para estructuras metálicas. Pese a que este tipo de ensayos no son de uso estrictamente aeronáutico, si que representan una parte muy importante de esta industria, ya que tanto desde el punto de vista económico, como desde el punto de vista de la seguridad, son una actividad necesaria. Éstos se incluyen dentro del concepto denominado *tolerancia al daño*, el cual establece la necesidad de comprobar el estado de los componentes de una estructura de forma continuada para así poder alargar su vida útil, y no desecharlos tan sólo por la presencia de algunos defectos. La tolerancia al daño pretende sustituir al antiquísimo

método de mantenimiento predictivo, incluido en todos y cada uno de los manuales de mantenimiento de aviones. Este tipo de procedimiento pretende de forma estadística evitar posibles daños catastróficos en estructuras y componentes. Por ello, se presentan diferentes tiempos y procedimientos para llevar a cabo una tarea de mantenimiento, según cual sea la parte del avión a estudiar. Estos manuales presentan esquemas autorizados para llevar un control riguroso en tiempo y acción de cada una de las actividades. En la actualidad, las autoridades aeronáuticas más importantes, *FAA* y *EASA* entre otras, permiten a las compañías que algunas labores de mantenimiento se sustituyan por un control continuado de las estructuras: Monitorización de la Integridad Estructural (*Structural Health Monitoring*, SHM).

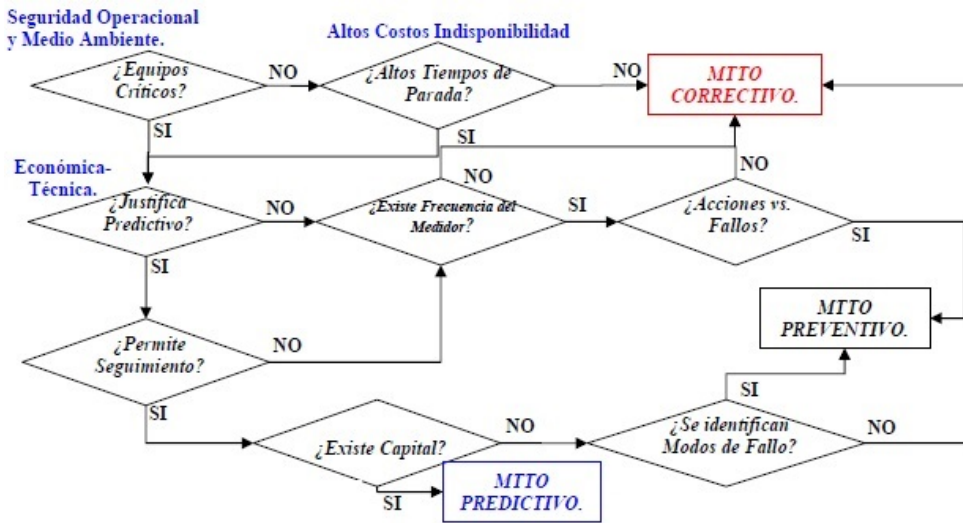


Figura 1: Selección de sistemas de mantenimiento

Para realizar un estudio adecuado del problema se deberá estudiar en primer lugar la propagación de las ondas en el medio que se quiere analizar. Para este caso concreto de detección mediante ultrasonidos se utilizarán ondas guiadas, más concretamente, *Ondas de Lamb* [1]. Tras un estudio pormenorizado de éstas a través de la placa, se trabajará con los resultados obtenidos para posteriormente implementar un método de detección de defectos basado en el cálculo de *derivadas topológicas* [15].

1.2. Objetivos del proyecto fin de carrera

En este caso concreto el título del proyecto define a la perfección el objetivo de éste: "*Detección de grietas en placas con técnicas multifrecuencia*". Tal y como se ha mencionado en el párrafo anterior el procedimiento resumido es: Estudiar las denominadas *Ondas de Lamb*, a partir de las cuales se aplicará una herramienta matemática denominada *Derivada Topológica*, que tal y como se observará más adelante, es un método ciertamente innovador a la vez que versátil. También se debe añadir que además de simular modelos de placas de tipo metálico, éstas tendrán un carácter isótropo, aunque tampoco sería de una complejidad extrema la extensión del problema

al campo de la anisotropía.

El desarrollo de esta herramienta de simulación que permite evaluar y estudiar diferentes configuraciones con la flexibilidad propia de un modelo computacional, permite su aplicación en prácticamente cualquier escenario posible para este tipo de ensayos no destructivos. De ahí la importancia que tiene un desarrollo compacto y sólido.

Los objetivos concretos perseguidos en este proyecto son:

- Formulación en el dominio de la frecuencia de la generación y propagación de ondas elásticas en una placa metálica.
- Modelización de los procesos de emisión y recepción, así como de las condiciones de contorno en los bordes de la placa.
- Formulación del problema inverso: estimar las zonas en las cuales existe mayor probabilidad de que se encuentren grietas a partir de las señales recibidas en receptores localizados.
- Elección de las frecuencias de emisión y de la localización de emisores y receptores.
- Evaluación de la eficiencia del método.
- Extensiones y trabajos futuros.
- Conclusiones y recomendaciones.

1.3. Antecedentes

Los ensayos no destructivos, *Non-Destructive Testing (NDT)*, se pueden definir como cualquier tipo de prueba que se realiza a un material para evaluar su estado, sin aplicarle ningún tipo de cambio en sus propiedades ni producirle daño alguno, evitando así afectar a su utilidad futura. De esta manera, y por razones obvias, resulta clara la expansión de este tipo de técnicas. Entre ellas se encuentran los ultrasonidos, los cuales serán objeto de estudio en este proyecto.

1.3.1. Tipos de ensayos no destructivos

Antes de comenzar con el estudio concreto del proyecto resulta interesante conocer los diferentes tipos de ensayos existentes en la actualidad, y así, posteriormente, valorar la viabilidad, el interés y la posible aportación de nuestro desarrollo para la industria. A continuación se exponen en la tabla 1 algunos de los más importantes y sus aplicaciones más usuales:

ENSAYOS NO DESTRUCTIVOS	APLICACIONES
<i>Termografía</i>	Corrosión, delaminación. . .
<i>Rayos X</i>	Grietas, corrosión, inclusiones. . .
<i>Ultrasonidos</i>	Discontinuidades en la superficie o cerca de ella. . .
<i>Resonancia</i>	Delaminaciones, huecos. . .
<i>Corrientes Inducidas</i>	Discontinuidades en superficies metálicas. . .
<i>Partículas Magnéticas</i>	Discontinuidades en materiales ferromagnéticos. . .
<i>Líquidos Penetrantes</i>	Grietas superficiales. . .
<i>Inspección Visual</i>	Detecciones superficiales de cualquier material. . .

Tabla 1: Tipos de ensayos no destructivos

Una vez nombrados los diferentes métodos, a partir de aquí el proyecto se centrará únicamente en los ultrasonidos.

1.3.2. Ondas de Lamb

En el año 1917, el inglés HORACE LAMB formula de forma teórica, y por primera vez, un tipo de ondas propagativas que posteriormente se nombrarían con su propio apellido [39]. Se definió como una perturbación elástica que se propagaba a través de placas sólidas. Hasta unos años después no se empezaron a generar, momento en el cual se empezó a atisbar su posible relevancia en la detección de defectos en placas. En ese instante diversas empresas comenzaron a estudiar y desarrollar máquinas que pudieran trabajar con este tipo de ondas. Entre los pioneros se encuentra la empresa *General Electric* (1960). También en esa década, de manos de *Hughes Aircraft Company*, se introdujeron las ondas de Lamb en la industria aeroespacial, comenzando por usarlas en placas metálicas delgadas y formas cilíndricas. Su procedimiento era muy simple: medían el tiempo que tardaba la onda desde que se emitía hasta que se recibía, y se tenía también en cuenta su atenuación en amplitud. Así eran capaces de estimar las grietas por fatiga existentes en las piezas ensayadas.

Un poco más tardío en el tiempo se consiguieron otros avances como la formulación de un algoritmo para calcular la amplitud de cada modo [56], la obtención del complejo patrón de desplazamiento de las ondas de Lamb [52], la optimización de la generación de ondas de Lamb direccionales [42]. . .

1.3.3. Métodos de medición

Algunos tipos de ensayos no destructivos tienen diferentes metodologías para realizar las mediciones. La elección de un sistema u otro depende de muchos factores: maquinaria disponible, material y accesibilidad de la estructura, defectos a medir, etc. Por todo lo anterior, a continuación se citan algunos de los modelos más extendidos, todos ellos perfectamente válidos para la detección de defectos tanto en estructuras metálicas como en materiales compuestos.

1.3.3.1. Pulso-Eco

Este método concreto de medición se caracteriza por ser el mismo piezoeléctrico el que realiza las labores de emisión y recepción. De forma simplificada, el transductor emite una determinada señal que al encontrarse con un defecto presenta una reflexión, cuyo eco es recibido por el mismo transductor que la envió. Este método implica una correcta elección del modo de excitación de las ondas de Lamb, puesto que si éste es muy dispersivo no se podrá detectar correctamente el defecto.

Este método empleado con ondas guiadas tiene gran utilidad en estructuras grandes, puesto que permite gran cobertura desde una única posición del palpador. Sin embargo, el pulso-eco se ha utilizado a lo largo de la historia de los ensayos no destructivos para inspeccionar a través del espesor de las piezas, por lo cual era necesario desplazar el piezoeléctrico a lo largo de toda la estructura, con lo que ello conllevaba.

En la Figura 2 se muestra de manera esquemática el funcionamiento de este método.

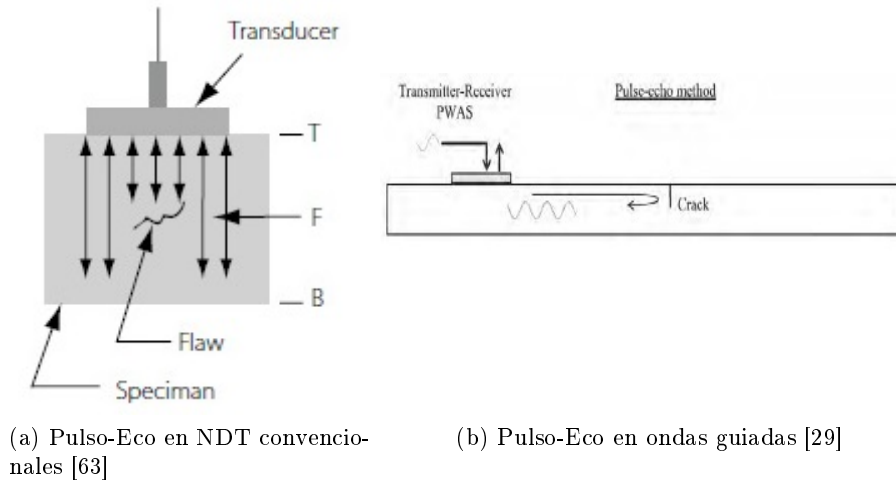


Figura 2: Método Pulso-Eco [29, 63]

1.3.3.2. Emisor-Receptor

Al contrario que en el caso anterior, ahora se encontrarán dos transductores, uno de ellos hará de emisor, y el otro de receptor. En este caso la característica a evaluar será la variación de las ondas de Lamb al atravesar el defecto. Esa modificación sufrida en forma, amplitud y fase lleva a detectar la presencia y magnitud de la grieta. Una representación esquemática se incluye en la Figura 3.

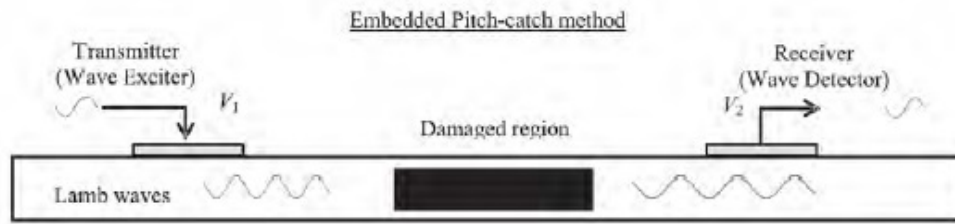


Figura 3: Método Emisor-Receptor [29]

Usualmente este método se llevaba a cabo mediante corrientes inducidas o emisiones acústicas, obligando a hacer un recorrido manual o mecánico de la estructura completa, con el derroche de tiempo y recursos que eso conlleva. Con el uso de las ondas guiadas ya no es imprescindible el desplazamiento de los transductores, permitiendo incluso la aparición de transductores integrados en las propias piezas.

1.3.4. SHM (Structural Health Monitoring)

El SHM, monitorización de integridad estructural, véanse [28, 59, 34, 11], se presenta como una gran ventana para el estudio actual en el campo de los ensayos no destructivos. Cada vez en mayor medida se busca un seguimiento en tiempo real de las estructuras, hecho incontestable hace algunos años, cuando era necesario retirar de la circulación una aeronave para poder realizar una inspección correcta, e incluso en muchos casos, desmontar partes del avión. En la actualidad este hecho se ha sustituido por un seguimiento continuado, y tan sólo será imprescindible apartar un avión de la circulación para reparar alguna pieza, o bien realizar alguno de los mantenimientos obligados en tierra. La inclusión de esta nueva idea de monitorización puede permitir ahorrar cerca del 50 % en costes directos de operación.

Los sistemas SHM no precisan de un único método o una arquitectura concreta. Cada desarrollador implementa sus propios métodos y dispositivos, pero siempre basados en la misma idea de monitorización. Atendiendo a [28], existe una clasificación según el tipo de actividad del método:

- **Sistemas activos.** Tratan de evaluar de forma directa la integridad estructural mediante la detección del daño, si lo hubiese, y de su gravedad.
- **Sistemas pasivos.** Su método de funcionamiento es diferente. En este caso, se evalúan mediciones de diferentes parámetros operacionales de la aeronave, pudiendo establecer así su integridad estructural.



Figura 4: Estructura SHM (Fuente: Holger Speckmann, Airbus)

Ambos sistemas presentan sus pros y sus contras. Resulta obvio que los sistemas activos presentarán mayores prestaciones para la detección del defecto, pero también presentarán una complejidad mucho mayor.

Por otro lado, el tipo de detección también se encontrará determinado por las zonas inspeccionadas, bien sean métodos locales o globales. El caso global tiene limitaciones, puesto que el estudio se realiza a través de la respuesta de la estructura completa, mientras que en la mayoría de los casos el daño será de tipo local y por tanto no afectará a todo el dominio estudiado de manera suficiente para generar una respuesta que sea significativa. A este hecho hay que añadir que factores como la temperatura o la humedad pueden llegar a afectar a las mediciones, por lo cual, esto siempre será más controlable en zonas pequeñas, en las cuales no se aprecie apenas la presencia de factores externos.

Por definición, en un sistema SHM, es deseable que se cumplan cuatro premisas: detectar la existencia del daño, localizarlo, tipificarlo y cuantificarlo. Presenta las siguientes características:

- **Arquitectura.** Se deben estimar las características del daño (daños típicos, tamaño crítico. . .) y de la monitorización (peso, potencia consumida, ubicación de sensores. . .).
- **Caracterización de la carga y/o daño.** Se valoran los daños característicos de cada material. En el caso metálico se creará predisposición a grietas por fatiga y corrosión, mientras que en materiales compuestos se buscarán delaminaciones o daños por impacto.
- **Transductores.** Son los encargados de emitir y recibir señales según su configuración previa. En el caso pasivo tan sólo se recibirá energía, mientras que en el caso activo también se emitirá.

- **Procesado de señales.** Consiste en la transformación de señales digitales en analógicas (emisión) y viceversa (recepción).
- **Comunicación.** Red encargada de interrelacionar los diferentes dispositivos del SHM.
- **Algoritmo.** Fin último de la información, encargado de procesarla y mostrar el resultado de la inspección.

Para finalizar la introducción acerca de los sistemas SHM se añade un listado de los principales tipos existentes en la actualidad, acompañados por una breve descripción de cada uno:

1. Monitorización por presión de vacío diferencial.

Este sistema consiste en medir diferencias de presiones entre tubos de vacío y tubos de presión conocida. En el momento en el cual se detecta la circulación de aire a través de una tubería de vacío se conocerá instantáneamente que existe una grieta. Su uso se puede extender a casi cualquier geometría, sin embargo se debe apreciar que tan sólo es capaz de detectar los defectos en la zona en la cual se encuentra colocado.

2. Monitorización por cables de rotura.

Consiste básicamente en unos filamentos colocados a lo largo de la estructura. Al deformarse dicha estructura, siempre y cuando supere el umbral establecido por el cable, éste se romperá. En ese instante se detectará el defecto. Es un método simple y barato, pero a la vez resulta bastante inconcluso, ya que no es capaz de detectar la posición exacta de la grieta a lo largo del espesor.

3. Monitorización por corrientes de Foucault.

La detección de cambios en la propagación de corrientes eléctricas a través del material identifica los defectos. Esto se debe al cambio de resistividad del medio. La detección de defectos mediante este medio es muy rápida y se permite en cualquier medio conductor, sin embargo, presenta ciertas limitaciones en cuanto a la profundidad de detección.

4. Monitorización por aproximación de deformación local.

Consiste en la comparación de la estructura en todo instante con la estructura inicial sin deformar. Cuando se produce alguna deformación, las medidas de ambos casos difieren, y por ello se detecta el defecto. Para ello se emplean sensores de fibra óptica o galgas extensiométricas. Se precisa de un gran número de sensores.

5. Monitorización por emisión acústica.

Se basa en la detección de las emisiones acústicas creadas durante la nucleación y propagación de la grieta. Permite detectar la posición del defecto, sin embargo, esto sólo será posible durante esos dos momentos, ya que luego dejará de emitir.

6. Monitorización por análisis modal.

Consiste en la comparación de la vibración de la estructura durante su uso con respecto a la vibración de la estructura intacta. Este método se basa en el hecho de que una pequeña modificación en una estructura, por ejemplo un defecto, provoca un cambio en sus modos y frecuencias propias. Por tanto, un cambio en éstas implicaría que la estructura ha sido dañada. No es válido para pequeños defectos.

7. Monitorización por redes de Bragg.

Se emplea fibra óptica para llevar a cabo este método. Esta fibra puede ir adherida a la superficie o bien embebida en el material. A través de ella se propagarán ondas guiadas de luz, capaces de detectar defectos con gran precisión. Este método se puede emplear en cualquier material, pero se debe tener en cuenta que es sensible a leves cambios de inclinación e incluso de temperatura.

8. Monitorización por red de piezoelectricos.

Para realizar un estudio a través de este método se precisa de emisores y receptores colocados de una forma estratégica a lo largo de la superficie del material a inspeccionar. El camino recorrido por las ondas guiadas a través del medio sufrirá dispersión (*scattering*), información que se aprovechará para determinar las características del defecto.

Este último método es el empleado por la empresa Aernnova Engineering en su proyecto *PAMELA*, ambicioso desarrollo de un sistema SHM del cual se hablará en el siguiente apartado. Por ende, ya que este proyecto se desarrolla de forma conjunta con Aernnova, y el siguiente paso tras la realización del simulador será la implementación de datos reales a través de sus mediciones, en este proyecto se empleará también dicho método con piezoelectricos.

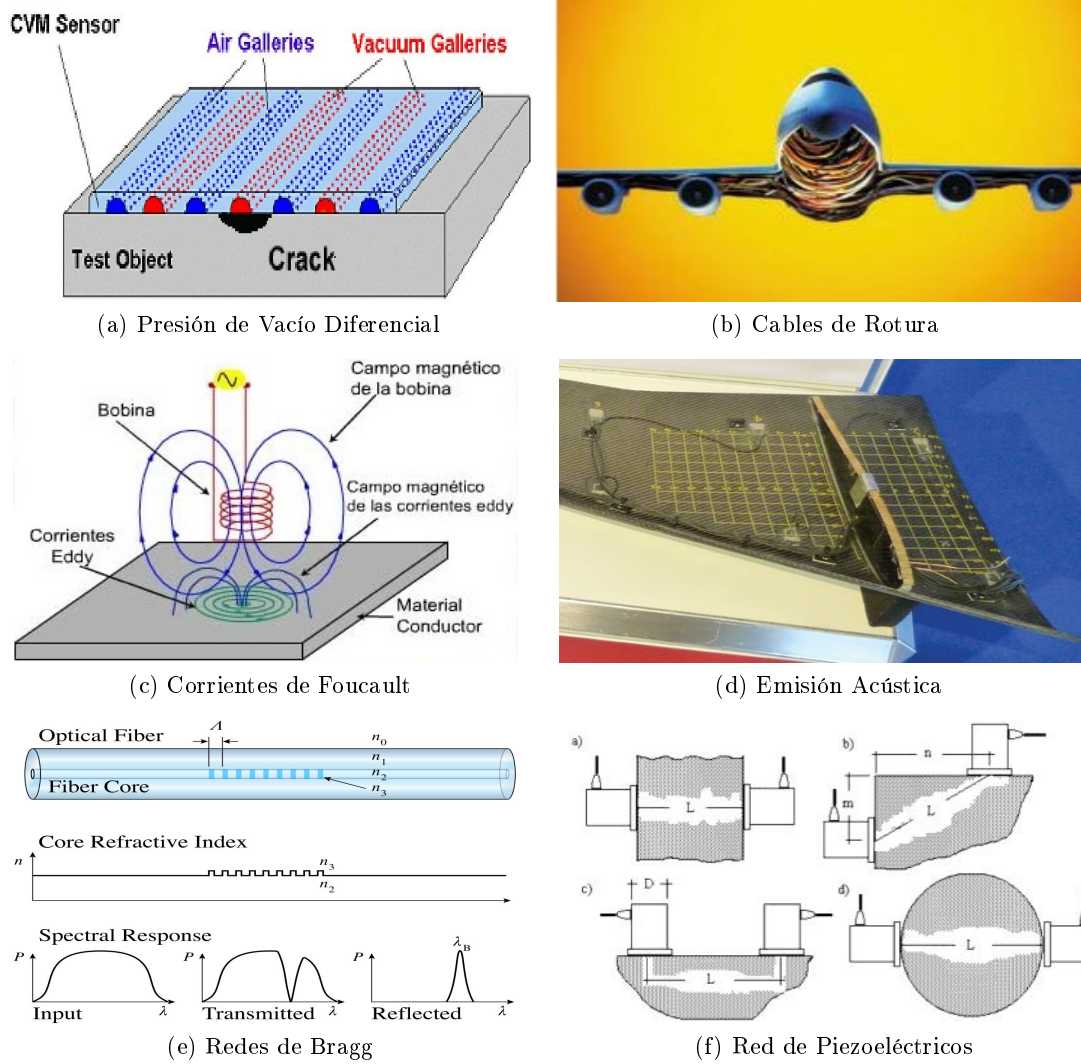


Figura 5: Tipos de SHM

1.3.5. Aernnova Engineering

Este proyecto se desarrolla bajo el marco de la empresa Aernnova Engineering, y más concretamente dentro del sistema de monitorización estructural *PAMELA SHM System*, en adelante, *PAMELA (Phased Array Monitoring for Enhanced Life Assessment)*. Actualmente se encuentra en una fase muy avanzada, aunque aún se siguen desarrollando muchos proyectos vinculados, tal y como es nuestro caso. La empresa presenta proyectos de gran relevancia en su línea de I+D+I, como son *ICARO (Advance Composites Innovation and Rear end Optimization)* dentro del desarrollo del software *MDO (Multidisciplinary Optimization)* y *MARVEL (Structural Health Monitoring of Reusable Launch Vehicle with Autonomous Ultrasonic System)*, íntimamente relacionados con *PAMELA*. Este sistema de monitorización se emplea en estructuras de pared delgada, ya sean metálicas o de material compuesto. Se englo-

ba dentro de los ensayos no destructivos, haciendo un seguimiento continuado y en tiempo real de la estructura en cuestión. Todos esos datos pasarían a ser analizados por técnicos, pilotos, y toda persona vinculada a la aeronave en la cual se encuentre instalado.

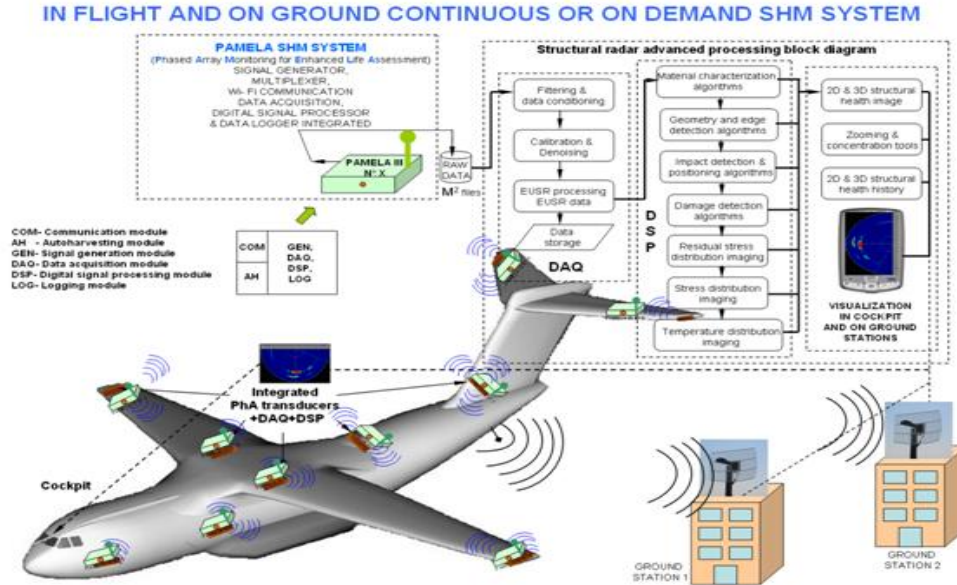


Figura 6: Esquema de monitorización PAMELA SHM (Fuente: Aernnova Engineering)

La vinculación de este proyecto fin de carrera con PAMELA conlleva ciertas dependencias en el desarrollo del simulador. Entre otras, cabe destacar el tipo de monitorización por red de piezoeléctricos, además de que éstos se posicionan en un array con una geometría (PCB, *Printed Circuit Board*), véase la Figura 7, y un tipo de excitación determinadas. Los transductores tendrán la capacidad de ser emisores y receptores, hecho importante a tener en cuenta.

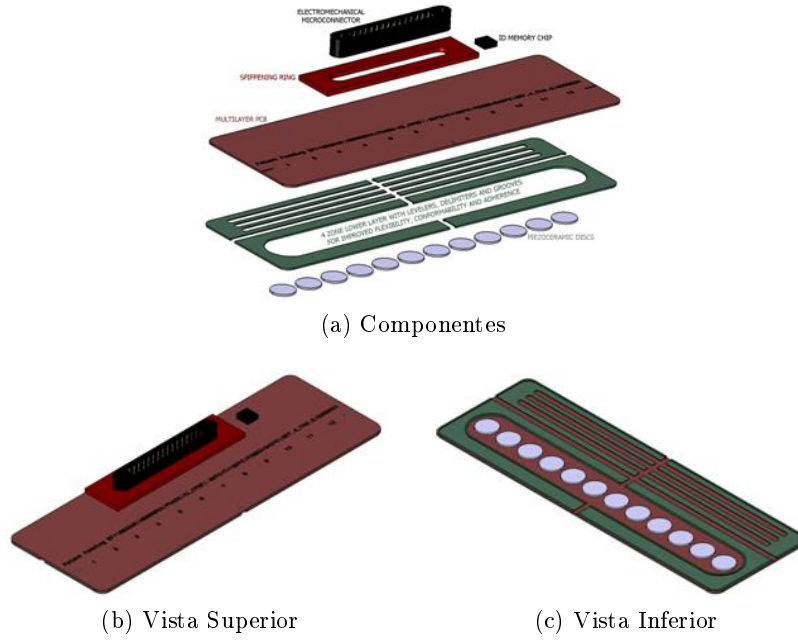


Figura 7: Transductor PhA III integrado (Fuente: Aernnova Engineering)

El transductor está formado por doce piezoelectricos circulares del tipo PZT, colocados en un circuito impreso y flexible que permite una fácil adhesión a la superficie del material a estudiar. Las dimensiones del piezoelectrico son: $\varnothing = 7,4mm$ y $0,5mm$ de espesor. La frecuencia de resonancia es de 300 kHz, dato muy relevante a la hora de excitar la placa mediante ultrasonidos.

Otra parte muy importante de PAMELA será su software, ya que según sus capacidades se deberá ajustar el simulador que vamos a desarrollar. Este controlador permitirá generar distintos tipos de señales, escogiendo la amplitud y tipo de excitación. Se podrá escoger entre señales tan dispares como senos, deltas de Dirac, etc. Además se permitirá realizar diferentes tipos de ensayos, entre otros:

- **Ensayo Simple.** Se emite desde uno de los piezoelectricos y se recibe en todos.
- **Ensayo Round Robin.** El sistema emite progresivamente por cada uno de los piezoelectricos y recibe por todos.
- **Ensayo Focusing.** Permite centrar la inspección en un zona determinada.

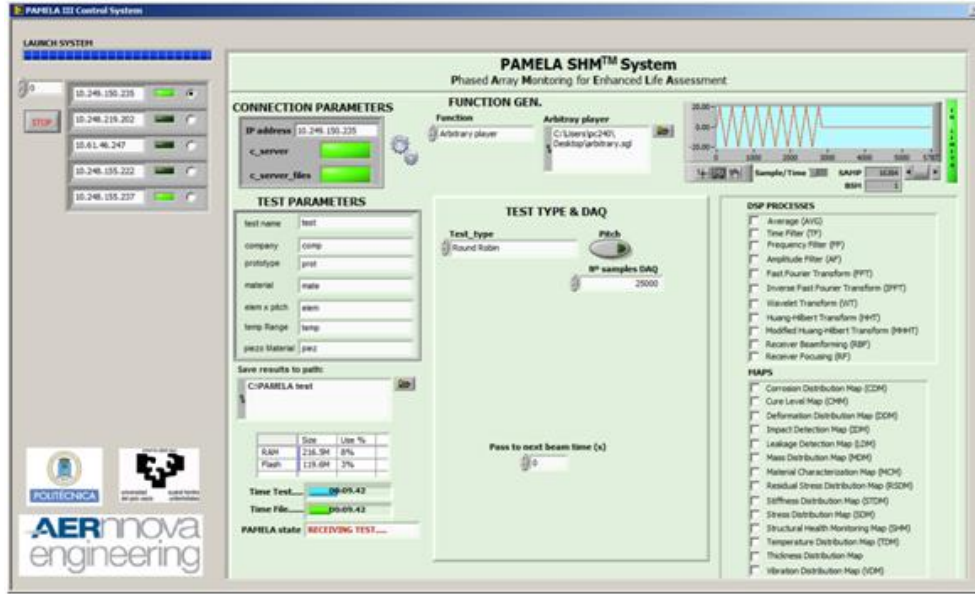


Figura 8: PAMELA GUI (Fuente: Aernnova Engineering)

Resulta muy interesante realizar una comparación entre los diferentes tipos de monitorización existentes en el mercado, para así poder discernir claramente entre las ventajas e inconvenientes de cada uno. Para ello se expondrán a continuación dos imágenes que representan de forma esquemática la capacidad de detección de daños de cada sistema, en función del tamaño del sensor (Figura 9a) y de la potencia consumida (Figura 9b). Estas imágenes representan un estudio realizado sobre un panel de material compuesto de dimensiones $1m \times 1m$. Hay que recordar que tanto PAMELA como nosotros, emplearemos las ondas de Lamb (*Lamb Waves*) como sistema de monitorización estructural.

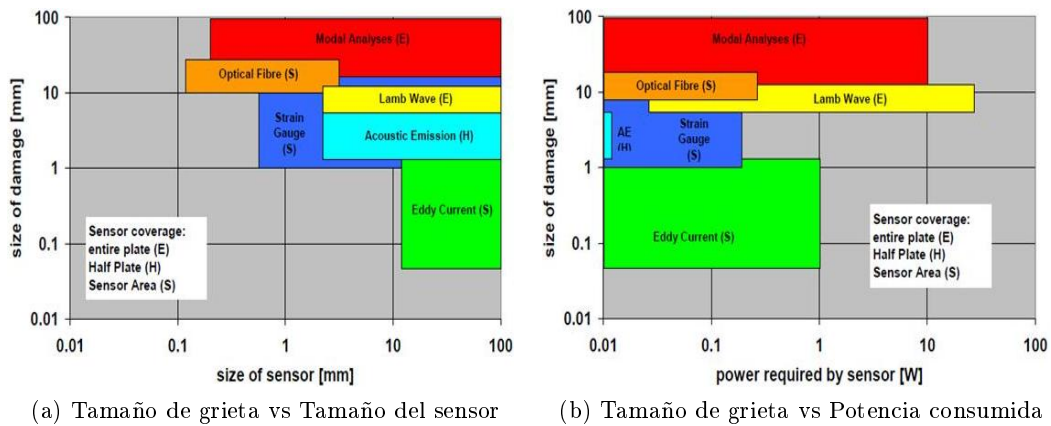


Figura 9: Comparativa SHM (Fuente: Aernnova Engineering)

Por último, conviene realizar algunas observaciones de las gráficas anteriores. En

primer lugar resaltar que las ondas de Lamb son el método que más energía precisa, mientras, que por otro lado, el método que menos consume es la emisión acústica. Por ello, parece interesante mezclar ambos en vías de conseguir un equilibrio. PAMELA realiza esa simbiosis entre métodos, utilizando en primer lugar la emisión acústica para localizar el daño, y en segundo lugar las ondas de Lamb, pero éstas ya centradas en la zona que se prevee que contendrá el defecto, con el consiguiente ahorro de energía.

Aunque en este caso parece haberse optimizado al máximo la monitorización, esto no es así. En primer lugar se debe apreciar, que tal y como se ha mencionado anteriormente, la emisión acústica solamente resulta perceptible durante la nucleación y crecimiento de la grieta, por lo cual este método resulta ciertamente limitativo. Además el tipo de mediciones que se realizarán a posteriori, mediante el llamado radar estructural, realizará barridos comparando tiempos de propagación en el medio sin grieta y con grieta, definiendo aquellos lugares donde el *scattering* ha hecho que la señal varíe. Este método también presenta alguna limitación, sobre todo al encontrar dos defectos muy juntos, o incluso uno detrás de otro (en el sentido de las ondas). Resulta también cierto, que las reflexiones en dominios finitos resultan a veces favorecedoras (para definir los defectos con mayor precisión o incluso encontrar algunos ocultos detrás de otros) y otras no (pueden crear interferencias en las señales medidas, además de que los medios finitos presentan frecuencias y modos propios). El método que se pretende implementar en este proyecto no precisa de la emisión acústica, puesto que es capaz de detectar la zona de mayor probabilidad en la que se puede encontrar el defecto, y a la vez definirlo, con tan sólo algunas mediciones *round robin*. Existe la salvedad de que el piezoeléctrico empleado como emisor ya no se empleará como receptor. También se debe aclarar que el hecho de realizar un simulador 3D en dominio finito obliga a tener en cuenta las ya mencionadas frecuencias propias, ya que pueden producir irregularidades e imprecisiones en las medidas.

2. Formulación de los problemas modelo directo e inverso

En este capítulo se va a formular matemáticamente el problema a resolver para nuestro proyecto. En primer lugar se realizará una introducción de los ensayos no destructivos mediante ultrasonidos y sus diferentes tipos de ondas involucradas, para posteriormente, en el apartado 2.3, formular la ecuación del problema, ecuación de Navier-Cauchy, que será particularizada en los subsiguientes apartados.

2.1. Ultrasonidos

Los ultrasonidos se definen como ondas acústicas o sonoras, por tanto de carácter mecánico, que se propagan a través de cualquier medio material mediante un movimiento armónico de sus partículas. Su frecuencia se encuentra por encima del umbral auditivo humano, comprendido entre 20 Hz y 20 kHz. Usualmente para los ensayos no destructivos se utilizan frecuencias del orden de los megahercios.

Los ultrasonidos pueden catalogarse en dos grupos principales en función de su aplicación. El primero de ellos se denomina *aplicaciones de potencia* y se caracteriza por la elevada intensidad de las ondas ultrasónicas empleadas. Se utiliza en la medicina con fines terapéuticos, y en la industria como activador de procesos físicos o químicos. En segundo lugar, en el grupo que compete a este proyecto, se encuentran las denominadas *aplicaciones de señal*, que en este caso se caracterizan por ser ultrasonidos de baja intensidad. Su utilización se basa en la propagación de las ondas a través de un material, para observar los cambios producidos en ellas, y así poder determinar sus características mecánicas y geométricas. Su uso se encuentra bastante extendido: en medicina es común realizar ecografías ultrasónicas, en el mundo naval aplicaciones de sónar y en la industria métodos no invasivos de detección de defectos.

Este método presenta ciertas ventajas frente a otros tipos de ensayos no destructivos:

- Capacidad para la detección de defectos de tamaño muy reducido.
- Capacidad para estimar con precisión la posición, el tamaño y la forma del defecto.
- Gran capacidad de penetración en el material.
- Gran sensibilidad que permite la determinación de las constantes elásticas del material inspeccionado.
- Precisa tan solo de una superficie para realizar la inspección.
- Presenta gran facilidad para la automatización del proceso.
- Permite un análisis prácticamente instantáneo del material.

Dos características muy importantes, y a tener en cuenta en los ultrasonidos, son la sensibilidad y la resolución. En apariencia, pueden parecer conceptos muy similares, sin embargo no es así. La sensibilidad es la capacidad de localizar pequeños defectos, mientras que la resolución es la capacidad del sistema para detectar dos defectos muy próximos entre sí, o bien cercanos a la superficie. El aumento de la frecuencia permite mejorar ambos parámetros en los métodos de óptica geométrica.

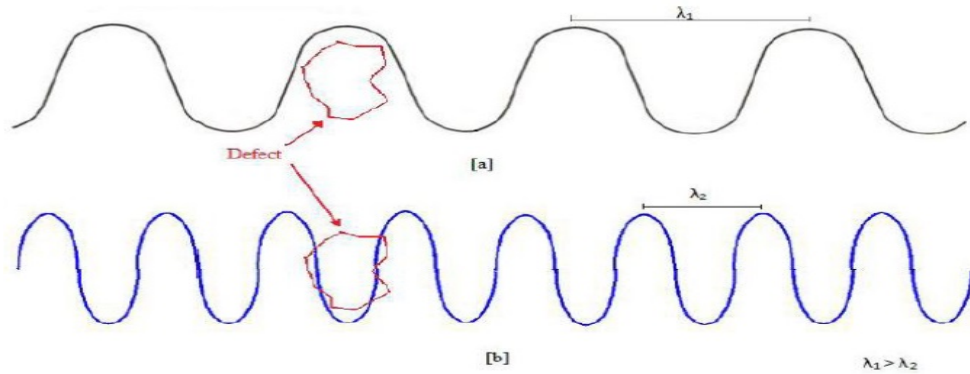


Figura 10: Longitud de onda vs Defecto (Óptica geométrica) [71]

Por último, no tendría sentido finalizar este apartado sin mencionar las imágenes acústicas, ya que son uno de los objetivos de este proyecto: ser capaz de reproducir y evaluar aquello que ocurre al simular ondas de Lamb a través de placas metálicas. Estas imágenes se generan a partir de las señales recibidas tras realizar un barrido ultrasónico, las cuales posteriormente son tratadas mediante diferentes técnicas que permiten reproducir en 2D y en 3D el material inspeccionado y así poder analizarlo.

2.2. Ondas de Lamb

La aplicación de cualquier tipo de excitación dinámica sobre la superficie de una placa genera ondas elásticas. Estas ondas sufren diferentes tipos de interferencias entre sí que vienen determinadas por ciertas condiciones. Algunos de estos factores son el material, el espesor de la placa, la frecuencia de las ondas... Este tipo de interferencias constructivas se caracterizan por modos, y no todos ellos se propagan, dependerá de su frecuencia y número de onda. A este tipo de ondas con carácter propagativo se les denomina ondas guiadas, y entre sus características principales cabe destacar el hecho de que son capaces de recorrer grandes distancias a través del material. Como es bien sabido, la elección de un medio finito o infinito conlleva diferencias importantes en la propagación. A continuación se exponen ambos casos con un ejemplo simple en 2D:

- **Espacio bidimensional infinito.** Las ondas sufren una atenuación del orden de $\mathcal{O}(1/r)$, siendo r la distancia a la fuente, ya que se reparte la energía elástica sobre el frente de onda, que a su vez crecerá como $\mathcal{O}(r)$.
- **Espacio bidimensional finito (placa).** En este caso las ondas no sufren la atenuación de la manera anterior, puesto que el frente de onda se mantiene

constante y limitado a la sección de la placa. En un medio finito, y más concretamente en una placa, cuya sección es constante, los factores determinantes para la atenuación de las ondas son la difracción por defectos y la capacidad dispersiva propia del medio.

Las ondas se caracterizan según su dirección de propagación, su velocidad y su energía transmitida. Este último concepto está relacionado con la dirección de oscilación de las partículas con respecto a la dirección de propagación de la onda. Según esto cabe la posibilidad de realizar una clasificación:

- **Ondas Longitudinales.** Son aquellas ondas que generan un movimiento de sus partículas en el mismo sentido de la propagación de la onda. Estas ondas presentan zonas de compresión y de expansión dentro del material donde se propagan. Son los tipos de ondas más utilizadas para ultrasonidos debido a su facilidad de generación y recepción. Además presentan otras ventajas como la posibilidad de orientar y concentrar el haz, junto con una gran velocidad de propagación. Este tipo de ondas se puede presentar en sólidos, líquidos o gases.
- **Ondas Transversales.** En este caso el movimiento de las partículas con respecto al de propagación de la onda es perpendicular, por lo cual precisa una resistencia a los esfuerzos de corte, hecho apenas existente en líquidos y gases. Por tanto, este tipo de ondas tan solo se obtendrán en medios sólidos.
- **Ondas de Superficie o de Rayleigh.** Este tipo de ondas se propagan por la superficie del sólido (no se pueden transmitir en otros medios) en el cual se han generado. El tipo de sólidos característicos para estas ondas son aquellos de un espesor relativamente elevado (un sólido semi-infinito resultaría válido en este caso). Son ondas ligeramente más lentas que los dos casos anteriores. Se utilizan en ensayos no destructivos con ultrasonidos para determinar defectos o irregularidades en superficies, ya que son muy sensibles a ellos. Sus partículas oscilan de forma elíptica, introduciéndose bajo la superficie un orden aproximado de una longitud de onda.
- **Ondas de Lamb.** Este tipo de ondas se genera cuando el espesor del sólido es mucho menor que las otras dos dimensiones (forma tipo placa, tubo...), y además el orden de este espesor es el de una longitud de onda. Se generan dos modos principales de vibración cuyo estudio resulta muy útil para algunos métodos de detección por ultrasonidos: modo Simétrico o Extensional y modo Antisimétrico o Flexural. Pese a utilizar las ondas de Lamb en este proyecto, el método utilizado no precisa de este estudio, sin embargo, se puede mencionar que se basa en una descomposición inicial de Helmholtz del campo de desplazamientos en una parte longitudinal y una transversal, $\vec{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \vec{H}$, siendo representados respectivamente por un potencial escalar (Φ) y uno vectorial (\vec{H}), los cuales serán posteriormente tratados con determinadas condiciones particulares hasta conseguir llegar a la ecuación de Rayleigh-Lamb (1).

$$\frac{\tan \beta d}{\tan \alpha d} = - \left[\frac{4\alpha\beta k^2}{(k^2 - \beta^2)^2} \right]^{\pm 1}, \quad (1)$$

siendo α y β dos variables dependientes de la frecuencia (ω) y de las velocidades de propagación de las ondas ($c \equiv$ velocidad de fase, $c_l \equiv$ velocidad de onda longitudinal y $c_t \equiv$ velocidad de onda transversal):

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (2)$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3)$$

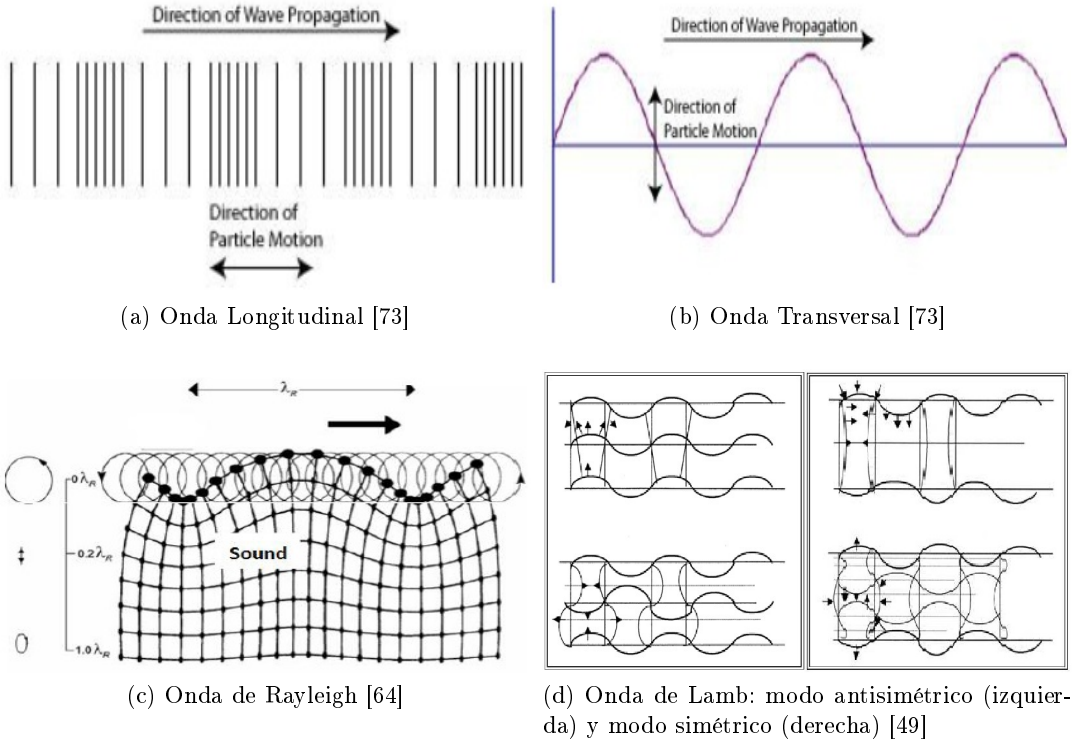


Figura 11: Tipos de ondas [73, 64, 49]

Tal y como se ha mencionado anteriormente, en este proyecto no se evaluarán las ecuaciones anteriores, puesto que no se precisa de la búsqueda de las curvas de dispersión, objetivo por el cual se hace el desarrollo anterior. Para el uso y estudio de las ondas de Lamb se empleará la ley que rige la elastodinámica: *Ley de Navier-Cauchy* (4):

$$(\lambda + 2\mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + f_i = \rho \partial_{tt} u_i \quad (4)$$

donde λ y μ son los *parámetros de Lamé* (véanse también (14) y (15)), ρ es la densidad del medio, u_i es el campo de desplazamientos, y f_i la fuerza volumétrica.

2.3. Formulación de la ecuación de Navier-Cauchy

En este apartado deduciremos la fórmula de Navier-Cauchy para un sólido tridimensional siguiendo [1]:

- **Ecuación de continuidad.** La cantidad de masa del cuerpo se conserva entre dos estados:

$$\partial_t \rho = -(\rho \partial_t u_i)_{,i} \quad (5)$$

representando ∂_t la derivada primera con respecto al tiempo.

- **Ecuación de cantidad de movimiento.** Es la versión generalizada de la segunda Ley de Newton:

$$\rho \partial_{tt} u_i = \sigma_{ij,j} + f_i, \quad (6)$$

siendo σ_{ij} el tensor de tensiones y ∂_{tt} la derivada segunda temporal.

- **Relación constitutiva.** Se supone que el problema es elástico lineal y por tanto se aplica la *Ley de Hooke* generalizada para relacionar el tensor de esfuerzos con el de deformaciones:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0) \quad (7)$$

donde $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$ es el tensor de deformaciones, C_{ijkl} es un tensor de orden cuatro denominado módulo elástico y que contiene las características del medio, β_{ij} es el tensor de expansión térmica, y T representa el campo de temperaturas.

Nosotros consideraremos que la temperatura no variará durante la inspección ultrasónica, por lo tanto la ecuación (7) quedará de la forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (8)$$

Si además se añade la condición de que el material sea isótropo, se obtiene la siguiente relación para el tensor de esfuerzos en función de los *parámetros de Lamé*:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (9)$$

representando δ_{ij} el operador *delta de Dirac*. Su forma vectorial quedaría:

$$\sigma(\vec{u}) = \lambda \operatorname{div}(\vec{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}). \quad (10)$$

En términos de los desplazamientos,

$$\sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \quad (11)$$

es decir,

$$\sigma_{ii} = 2\mu u_{i,i} + \lambda \operatorname{div} \vec{u} \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i \neq j. \quad (13)$$

Los parámetros de Lamé se suelen relacionar [40] con el *módulo de Young* (E) y el *coeficiente de Poisson* (ν):

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

Con todo lo anterior se obtiene la ya mencionada ecuación de Navier-Cauchy en su forma fuerte, presentada a continuación tanto de forma indicial (16) como vectorial (17),

$$(\lambda + 2\mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + f_i = \rho \partial_{tt} u_i \quad (16)$$

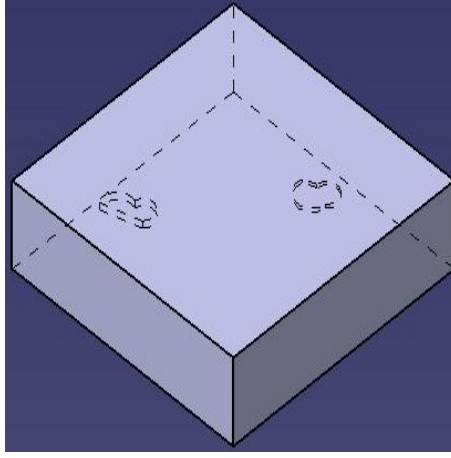
$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{u} + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (17)$$

que en forma contraída sería

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \vec{f} + \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}) \quad (18)$$

La ecuación anterior se completará con una serie de condiciones de contorno que se expondrán a continuación. De esa manera el problema quedaría perfectamente definido.

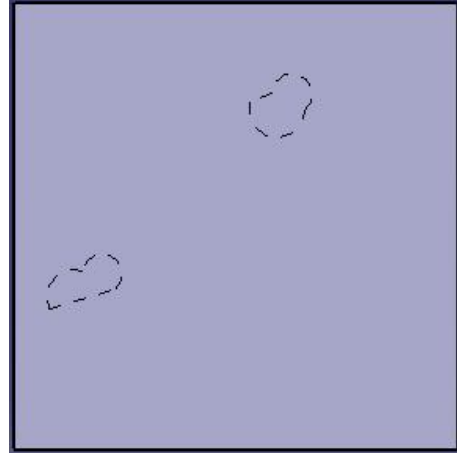
2.4. Formulación del problema modelo



(a) Vista isométrica



(b) Vista frontal



(c) Vista superior

Figura 12: Dominio del problema directo

La Figura 12 representa la configuración geométrica que consideraremos para el problema directo, una placa rectangular con grietas, donde

$$\begin{cases} \Omega = \text{Placa entera} \\ D = \bigcup_{i=1}^d D_i = \text{Defectos} \end{cases} \quad . \quad (19)$$

En este proyecto nos centraremos en problemas armónicos en tiempo, en los cuales el campo de desplazamientos y las fuerzas sean de la forma siguiente:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \Re \{ \vec{u}(\vec{x}) \exp(-i\omega t) \} \quad (20)$$

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \Re \left\{ \vec{f}(\vec{x}) \exp(-i\omega t) \right\}, \quad (21)$$

donde ω es la frecuencia angular. A su vez $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia en Hz.

En este caso, habrá que resolver un problema para $\vec{u}(\vec{x})$ de la forma

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) + \rho \omega^2 \vec{u} + \vec{f} = \vec{0} \quad \text{en } \Omega \setminus D. \quad (22)$$

Estas ecuaciones se escriben equivalentemente como

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{u}) + \rho \omega^2 u_i + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Modelaremos los palpadores mediante \vec{f} e impondremos condiciones de tipo Neumann homogéneas tanto en la frontera exterior de la placa, $\partial\Omega$, como en la frontera de los defectos, ∂D . Estas condiciones modelan un comportamiento de no transmisibilidad, puesto que el material de la placa se supone más denso que el aire. De esta forma, el comportamiento de la placa estará regido por el siguiente problema:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) + \rho \omega^2 \vec{u} + \vec{f} = \vec{0} & \text{en } \Omega \setminus D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \vec{n} = \vec{0} & \text{en } \partial\Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \vec{n} = \vec{0} & \text{en } \partial D. \end{cases} \quad (24)$$

El modelado de los sensores se llevó a cabo de dos maneras diferentes. Una de ellas consistió en simular los palpadores de forma superficial para así conseguir acercarse lo máximo posible a la realidad. Dentro de estas superficies se simulaban varios tipos de funciones analíticas diferentes, también con la intención de reproducir en la mayor medida posible el tipo de forzamiento que generan los transductores reales sobre la placa. Éstas eran gaussianas y anillos. En segundo lugar se pasó a forzamientos puntuales, como es el caso de las *deltas de Dirac*.

A continuación, en la Figura 13, se muestra una configuración con palpadores puntuales y otra con palpadores superficiales:

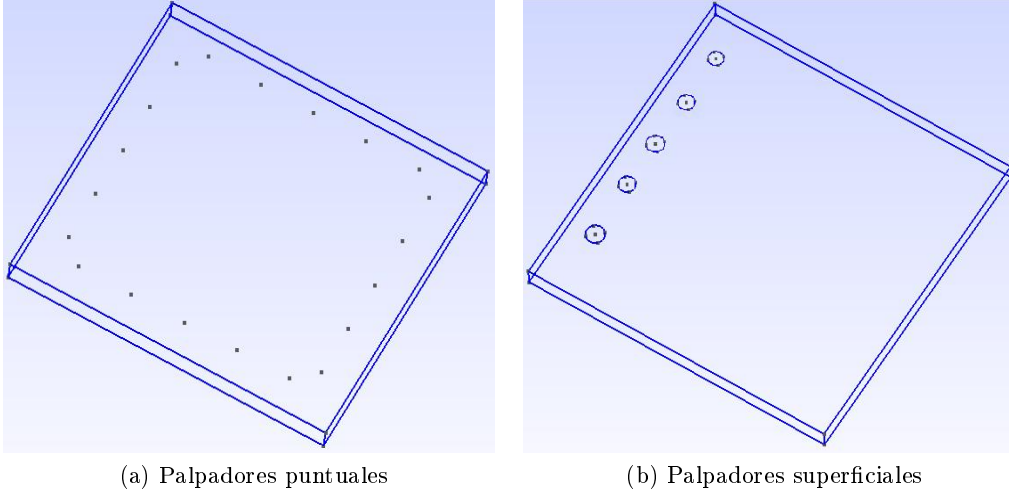


Figura 13: Configuración de palpadores

2.5. Problema inverso

En este proyecto estamos interesados en identificar la localización, tamaño y geometría de los posibles defectos D_1, D_2, \dots, D_d , de una placa a partir de mediciones de los desplazamientos \vec{u} en los receptores.

El problema directo es el introducido en el apartado anterior: conocidos los parámetros de Lamé, el tipo de onda emitida (que se modela con \vec{f}), la frecuencia ω y la localización de los defectos $D = \bigcup_{i=1}^d D_i$, podemos calcular los desplazamientos en los receptores resolviendo el problema (24). Es decir, los valores

$$\vec{u}(\vec{x}_1), \vec{u}(\vec{x}_2), \dots, \vec{u}(\vec{x}_{N_{\text{receptores}}}) \quad (25)$$

son los datos que se recogen en los $N_{\text{receptores}}$ $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{N_{\text{receptores}}})$ de manera experimental. Nosotros, a falta de disponer de datos reales, generaremos estos datos numéricamente resolviendo (24).

El problema inverso consiste entonces en encontrar los defectos D de modo que la solución \vec{u} de (24) coincida con los datos medidos en los receptores, es decir, encontrar los defectos D tales que

$$\vec{u}(\vec{x}_1) = \vec{u}_{\text{medida}}(\vec{x}_1), \dots, \vec{u}(\vec{x}_{N_{\text{receptores}}}) = \vec{u}_{\text{medida}}(\vec{x}_{N_{\text{receptores}}}). \quad (26)$$

A diferencia del problema directo, se trata ahora de resolver un problema mal planteado: puede no tener solución, o tener muchas. Además, lo más significativo es que la solución no depende de manera continua de los datos, es decir, pequeños errores en las mediciones pueden conducir a reconstrucciones muy dispares. Esto es habitual en este tipo de problemas, por lo que se requieren métodos muy robustos.

Para regularizar el problema, lo plantearémos de una forma más débil: vamos a buscar los defectos D que minimicen el funcional

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus D) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{receptores}} \|\vec{u}(\vec{x}_i) - \vec{u}_{medida}(\vec{x}_i)\|^2, \quad (27)$$

donde \vec{u} es la solución del problema (24) cuando los defectos inmersos en la placa Ω son D .

Si consideramos emisiones desde los distintos palpadores y a distintas frecuencias, minimizaremos el funcional

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus D) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{frecuencias}} \sum_{j=1}^{N_{emisores}} \sum_{i=1}^{N_{receptores}} \alpha_{kj} \left\| \vec{u}_{\omega_k}^j(\vec{x}_i) - \vec{u}_{medida, \omega_k}^j(\vec{x}_i) \right\|^2, \quad (28)$$

donde $\vec{u}_{\omega_k}^j$ es la solución de (24) cuando la frecuencia es ω_k y $\vec{f} = (0, 0, -\delta_{\vec{x}_i})$, correspondiente a emitir desde el j -ésimo emisor. Los coeficientes $\alpha_{kj} > 0$ son pesos que asignaremos a cada frecuencia y a cada emisor. Estos pesos se elegirán a posteriori, tal y como indicaremos en el próximo capítulo.

3. Sensibilidad Topológica

3.1. Introducción

La identificación de defectos y heterogeneidades embebidas en cuerpos finitos y semi-infinitos, a través del estudio de ondas elásticas, es un problema de gran interés en la actualidad [30, 23, 44, 58, 21, 3, 9, 4]. Algunas de sus aplicaciones son la caracterización de materiales, la sismología y la diagnosis médica.

La detección de defectos inmersos en medios conocidos puede llevarse a cabo bajo múltiples métodos, entre los cuales la derivada topológica es reconocida como una prometedora herramienta para la resolución de problemas de optimización. De hecho, es una herramienta versátil que puede ser aplicada tanto en la resolución de problemas inversos, como en la simulación de fenómenos físicos con cambios en la configuración del dominio. Uno de sus primeros usos estuvo relacionado con la optimización de estructuras [22]. Éste consistía en un proceso iterativo a través del cual se iba eliminando material innecesario de una estructura. En la Figura 14 se expone un ejemplo extraído de [48] de dicha aplicación:

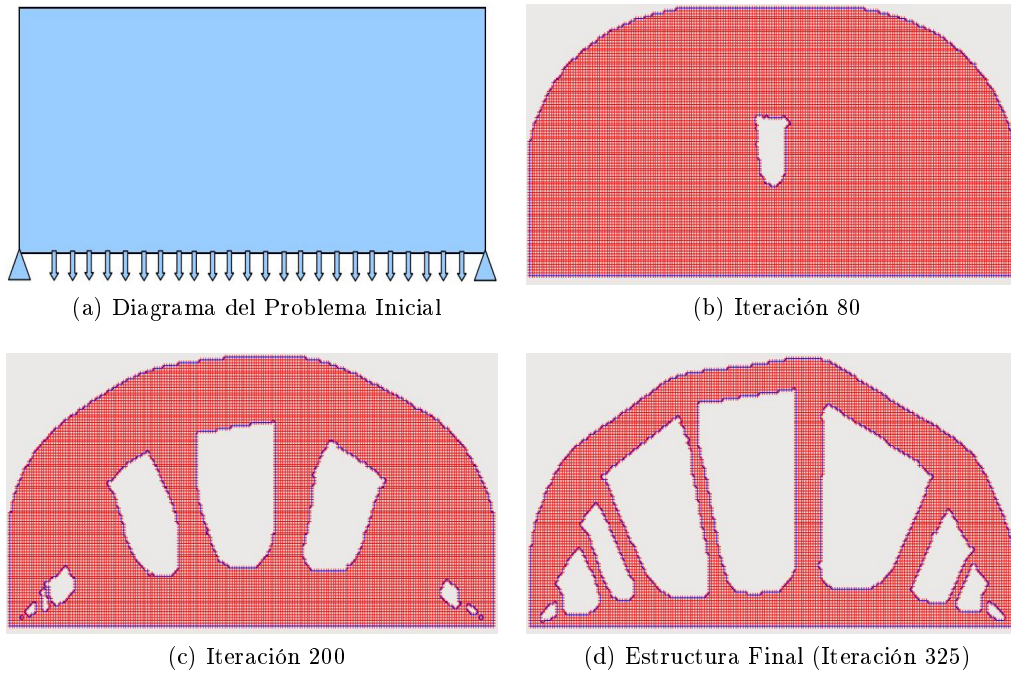


Figura 14: Optimización de un puente [48]

Tal y como se ha mencionado en el capítulo anterior, la resolución de un problema inverso será el proceso que nos concierne en este proyecto. Muchos de los métodos ya existentes requieren de una información previa fiable para comenzar a trabajar, sin embargo, los métodos basados en el cálculo de derivadas topológicas no precisan de dicho conocimiento. Por ello, en muchos casos, no ha sido empleado como único

medio de detección, sino que también se ha utilizado como primer paso en métodos iterativos que requieren información previa para inicializarse, por ejemplo en métodos de conjuntos de nivel [10].

A continuación se incluye en la Figura 15 un ejemplo extraído de [8], en el que se reconstruye un defecto a partir de mediciones a lo largo de un intervalo de tiempo de las ondas recibidas en los puntos señalados en la Figura 15a mediante puntos rojos, cuando las excitaciones se han realizado desde los emisores señalados con los triángulos azules.

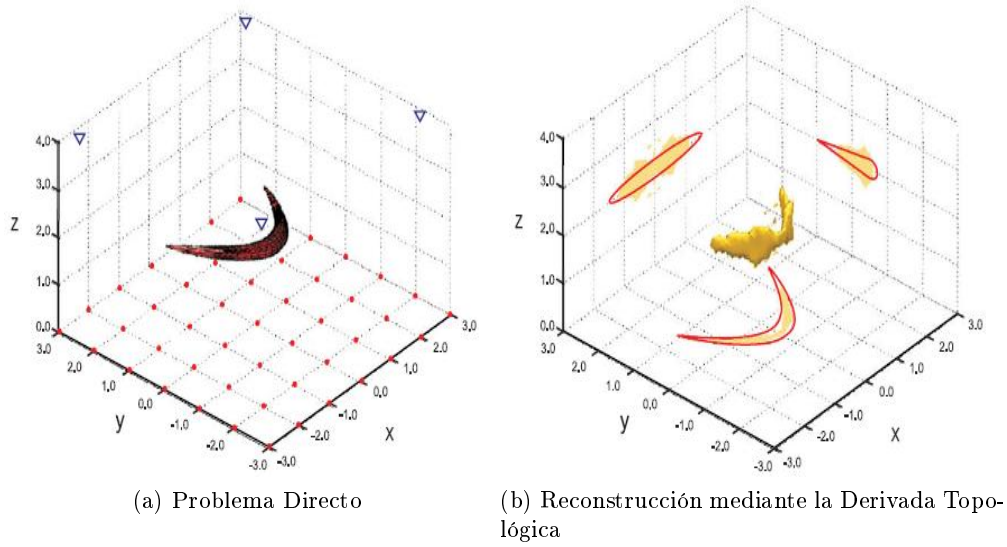


Figura 15: Ejemplo de la reconstrucción de un objeto utilizando derivadas topológicas

3.2. Derivada topológica para la detección de defectos

Muchos problemas inversos relacionados con la detección de defectos inmersos en un medio pueden reformularse como un problema de minimización, en el que se buscan los objetos D inmersos en una región R (en nuestro caso, R es la placa Ω) que minimicen un cierto funcional \mathcal{J} . Los métodos basados en el cálculo de derivadas topológicas han adquirido una relevancia considerable en los últimos años y se han aplicado con éxito en contextos muy distintos: problemas acústicos [14, 24], problemas de tomografía de impedancia eléctrica [12], fototermia [13, 16], problemas de elasticidad lineal [35, 7, 8], ...

El problema que nos ocupa en este proyecto es similar a los estudiados en [35, 7, 8], con la salvedad de que nuestro problema tiene lugar en un medio finito, y las ondas generadas serán monofrecuencia, pero se combinarán resultados para varias frecuencias distintas.

En la literatura pueden encontrarse también trabajos recientes en los que se

explota la idea de combinar resultados obtenidos para diferentes frecuencias individualmente [47, 45, 46, 25]. La diferencia principal en estos trabajos es la forma en la que se combinan los resultados a distintas frecuencias con el fin de obtener reconstrucciones fidedignas. En este proyecto utilizaremos las ideas propuestas en [47] y aplicadas en [25] para un problema acústico bidimensional.

Como veremos a continuación, la derivada topológica de un funcional es una función escalar que puede ser interpretada como un mapa, en el que las regiones en las que dicha derivada alcanza los valores negativos de mayor valor absoluto, se identifican con aquellas regiones en las que es más probable que se encuentre un defecto. Para ilustrar esta idea, se ha extraído de [25] el ejemplo mostrado en la Figura 16, en la que se representan los valores de la derivada topológica en un problema acústico, considerando datos recogidos en los receptores señalados con cruces, generados a 14 frecuencias distintas. Los valores negativos de mayor valor absoluto (colores azules en el dibujo) se concentran claramente en la elipse señalada en negro, que es el objeto a identificar en ese problema.

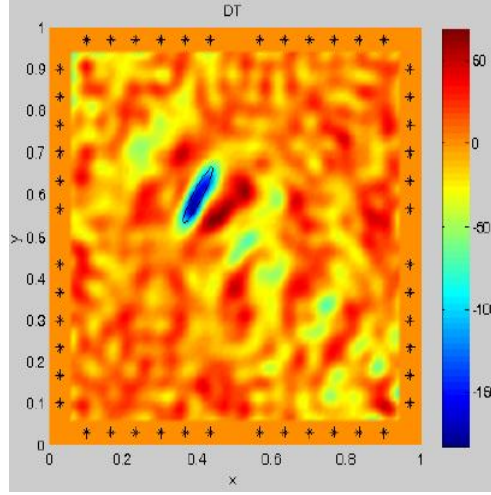


Figura 16: Derivada topológica multifrecuencia en un problema acústico [25]

3.3. Definición de derivada topológica y fórmula para el problema modelo

La derivada topológica de un funcional \mathcal{J} , definido en una región R , mide la sensibilidad de \mathcal{J} con respecto a la creación de una cavidad infinitesimal en cada punto $\vec{x} \in R$. Si dicha cavidad es esférica, $B_\varepsilon(\vec{x}) = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^3 / \|\vec{z} - \vec{x}\| < \varepsilon\}$, entonces dicha derivada se define como [55]:

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(R \setminus B_\varepsilon(\vec{x})) - \mathcal{J}(R)}{h(\varepsilon)}, \quad \vec{x} \in R \quad (29)$$

siendo $h(\varepsilon)$ una función escalar positiva, que se elige de modo que el límite (29) sea finito y no nulo. En el caso del problema de transmisión o de Neumann en el

espacio puede tomarse $h(\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$ (véase [35, 7, 8]). En la Figura 17 se muestra una representación esquemática de la geometría involucrada en el cálculo de la derivada topológica.

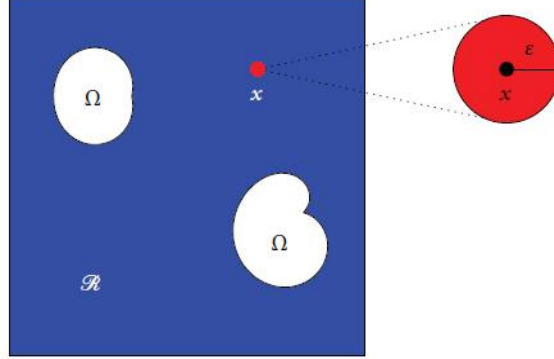


Figura 17: Representación geométrica del cálculo de derivadas topológicas [15]

De la definición (29) se extrae que

$$\mathcal{J}(R \setminus B_\varepsilon(\vec{x})) = \mathcal{J}(R) + h(\varepsilon)\mathcal{T}(\vec{x}) + \mathcal{O}(h(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30)$$

La relación anterior motiva la estrategia de identificación de defectos: si situamos objetos pequeños en los lugares \vec{x} donde $\mathcal{T}(\vec{x})$ es negativa con un valor pronunciado, entonces el valor del funcional decrecerá. Identificaremos, por tanto, las regiones en las que se concentren puntos en los que la derivada topológica alcance los valores negativos más grandes en valor absoluto, con las regiones en las que habrá una mayor probabilidad de encontrar un defecto.

En [24] se propuso un método muy sistemático para calcular la derivada topológica de un funcional. Se basa en obtener \mathcal{T} como un límite de derivadas de forma, que, a su vez, pueden calcularse introduciendo una formulación lagrangiana del problema (es allí donde aparece el problema adjunto). Para llevar a cabo el paso al límite, se utilizan desarrollos asintóticos de las soluciones de los problemas directo y adjunto que aparecen en el cálculo de derivadas de forma. En [35, 7, 8], se sigue un método distinto, basado en una formulación de elementos de contorno del problema original, mediante el cual se llega de nuevo a una expresión explícita de la derivada topológica en términos de la solución de un problema directo y de uno adjunto.

Siguiendo los desarrollos de [35, 7, 8], adaptando los cálculos a nuestro problema, donde el medio Ω ahora es acotado en vez de infinito, y con condiciones de Neumann homogéneas en la frontera, se puede demostrar las fórmulas que se indican a continuación:

Si se considera el funcional asociado a la emisión desde cada uno de los emisores \vec{x}_j , $j = 1, \dots, N_{emisores}$ a una frecuencia ω :

$$\mathcal{J}_{\omega,j}(\Omega \setminus D) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{Nreceptores} \left\| \vec{u}_{D,\omega}^j(\vec{x}_i) - \vec{u}_{medida,\omega}^j(\vec{x}_i) \right\|^2, \quad (31)$$

donde $\vec{u}_{medida,\omega}^j(\vec{x}_i)$ es el vector de desplazamientos medido en \vec{x}_i al emitir desde \vec{x}_j , y $\vec{u}_{D,\omega}^j(\vec{x}_i)$ es la solución del problema directo cuando los defectos inmersos en la placa Ω son D , es decir, cuando $\vec{u}_{D,\omega}^j(\vec{x}_i)$ es la solución de

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\boldsymbol{\sigma} \left(\vec{u}_{D,\omega}^j \right) \right) + \rho \omega^2 \vec{u}_{D,\omega}^j + (0, 0, \delta_{x_j}) = 0 & \text{en } \Omega \setminus D \\ \boldsymbol{\sigma} \left(\vec{u}_{D,\omega}^j \right) \vec{n} = \vec{0} & \text{en } \partial\Omega \cup \partial D \end{cases} \quad (32)$$

se puede demostrar que la derivada topológica de $\mathcal{J}_{\omega,j}(\Omega \setminus D)$ es

$$\mathcal{T}_{\omega,j}(\vec{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\vec{p}_{\omega}^j(\vec{x})) : \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}_{\omega}^j(\vec{x})) - \rho \omega^2 \vec{p}_{\omega}^j(\vec{x}) \cdot \vec{u}_{\omega}^j(\vec{x}) \quad (33)$$

donde \mathbf{A} es un tensor de cuarto orden que contiene las características propias del medio,

$$\mathbf{A} = \frac{3(1-\nu)}{2\mu(7-5\nu)} \left[5\mathbf{I}_4^{sim} - \frac{1+5\nu}{2(1+\nu)} \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \right], \quad (34)$$

y \vec{p}_{ω}^j , \vec{u}_{ω}^j son soluciones de los siguientes problemas de Neumann en la placa sin defecto:

Problemas directos:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}_{\omega}^j) + \rho \omega^2 \vec{u}_{\omega}^j + (0, 0, \delta_{x_j}) = \vec{0} & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}_{\omega}^j) \vec{n} = \vec{0} & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (35)$$

Problemas adjuntos:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\vec{p}_{\omega}^j) + \rho \omega^2 \vec{p}_{\omega}^j + \sum_{i=1}^{Nreceptores} \left(\vec{u}_{\omega}^j(\vec{x}_i) - \vec{u}_{medida,\omega}^j(\vec{x}_i) \right) \delta_{\vec{x}_i} = \vec{0} & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\vec{p}_{\omega}^j) \vec{n} = \vec{0} & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (36)$$

Nótese que los problemas adjuntos dependen de los problemas directos, ya que \vec{u}_{ω}^j , la solución de (35), aparece en el forzante del problema (36).

Los defectos reales D aparecen en la derivada topológica gracias al término $\sum_{i=1}^{Nreceptores} \left(\vec{u}_{\omega}^j(\vec{x}_i) - \vec{u}_{medida,\omega}^j(\vec{x}_i) \right) \delta_{\vec{x}_i}$ del problema adjunto.

De manera menos compacta, la expresión (33) de la derivada topológica puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\omega,j}(\vec{x}) = & \frac{3(1-\nu)}{2\mu(7-5\nu)} \left\{ 5\sigma(\vec{p}_{\omega}^j(\vec{x})) : \sigma(\vec{u}_{\omega}^j(\vec{x})) - \frac{1+5\nu}{2(1+\nu)} \text{tr}(\sigma(\vec{p}_{\omega}^j(\vec{x}))) \text{tr}(\sigma(\vec{u}_{\omega}^j(\vec{x}))) \right\} \\ & - \rho\omega^2 \vec{p}_{\omega}^j(\vec{x}) \cdot \vec{u}_{\omega}^j(\vec{x}) \end{aligned} \quad (37)$$

donde $A : B = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$ y $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^3 A_{ii}$.

Las técnicas multifrecuencia permiten mejorar las características de la detección de defectos de una forma bastante simple: combinando casos en los cuales se emite a diferentes frecuencias. Se debe tener cuidado con la forma en la cual se realiza dicha combinación, puesto que no se puede realizar de cualquier manera. Existen diversos métodos para realizarla, algunos de ellos como el mostrado en [47, 25]. Este método implica una ponderación de las medidas hechas para diferentes frecuencias, estableciendo un peso diferente para cada una de ellas.

Es decir, consideraremos funcionales de la forma

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus D) = \sum_{k=1}^{N \text{ frecuencias}} \sum_{j=1}^{N \text{ emisores}} \alpha_{kj} \mathcal{J}_{\omega_k,j} \quad (38)$$

donde los coeficientes α_{kj} se calcularán tras obtener las derivadas topológicas correspondientes a cada frecuencia individual, $\mathcal{T}_{\omega_k,j}$, desde cada uno de los emisores \vec{x}_j . De este modo, por linealidad, la derivada topológica de (38) es

$$\mathcal{T}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{N \text{ frecuencias}} \sum_{j=1}^{N \text{ emisores}} \alpha_{kj} \mathcal{T}_{\omega_k,j}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (39)$$

siendo $\mathcal{T}_{\omega_k,j}(\vec{x})$ la derivada correspondiente a la frecuencia ω_k indicada en (37) y al emisor \vec{x}_j .

Con el fin de conseguir que todas y cada una de las derivadas topológicas, $\mathcal{T}_{\omega_k,j}$, tengan la misma importancia en la contribución final, \mathcal{T} , en [47, 25] se propone calcular los valores de α_{kj} de la siguiente manera:

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{\left| \min_{\vec{x} \in \Omega \setminus V} \mathcal{T}_{\omega_k,j}(\vec{x}) \right|}, \quad (40)$$

consiguiendo de esta manera escalar las diferentes derivadas topológicas. Se puede observar que el dominio para \vec{x} en este caso no es la placa completa, puesto que al normalizar la derivada topológica a través de (40) no se emplearán los valores próximos a la zona de emisión de los palpadores. En dicha zona, las derivadas topológicas alcanzarán valores muy elevados con respecto al resto de la placa debido al forzamiento (deltas). Si empleáramos estos valores para calcular α_{kj} , atenuaríamos $\mathcal{T}_{\omega_k,j}$ en el resto de la placa.

4. Simulación numérica

Este capítulo está dedicado a la solución numérica de problemas de la forma

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) + \rho \omega^2 \vec{u} = -\vec{f} & \text{en } \Lambda \\ \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \vec{n} = \vec{0} & \text{en } \partial\Lambda \end{cases} \quad (41)$$

Este tipo de problemas surge en la simulación de los datos experimentales (en este caso $\Lambda = \Omega \setminus D$ es la placa con defectos y $\vec{f} = (0, 0, -1) \delta_{\vec{x}_j}$, siendo \vec{x}_j la posición del j -ésimo emisor) y en la implementación de la derivada topológica, donde los problemas adjunto y directo involucrados son también de la forma (41) con $\Lambda = \Omega$ (placa sin defectos). En el problema directo $\vec{f} = (0, 0, -1) \delta_{\vec{x}_j}$ y en el adjunto \vec{f} es de la forma $\vec{f} = \sum_{i=1}^{N_{\text{receptores}}} \vec{\beta}_i \delta_{\vec{x}_i}$.

En este proyecto hemos optado por resolver estos problemas utilizando el método de los elementos finitos, considerando para ello software de código abierto (*Gmsh*, *Elmer*, *ParaView* y *Python*) y *Matlab*TM. En este capítulo describiremos el método de los elementos finitos aplicado a la resolución numérica de (41), y el próximo capítulo estará dedicado al software que se ha utilizado.

4.1. Descripción del Método de los Elementos Finitos (FEM)

El método de los elementos finitos (*FEM - Finite Element Method*) es un método numérico utilizado para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

En general el método se puede dividir en varios pasos:

1. **Formular el problema en forma variacional o débil.** Consiste en la transformación de la ecuación en derivadas parciales del problema original en una forma integral.
2. **Dividir el dominio en subdivisiones o elementos finitos.** Se divide el dominio mediante líneas o superficies imaginarias. En cada uno de esos elementos existirán una serie de nodos en los cuales se calcularán las incógnitas del problema. Dependiendo del número de dimensiones de la geometría del problema, aparecerán distintos tipos de subgeometrías, entre las que destacan por su frecuente uso las triangulares y cuadrangulares (2D), y las tetraédricas y hexaédricas (3D).
3. **Elegir las funciones de forma.** Asociado a la partición del dominio se construye un espacio vectorial de dimensión finita en el que se buscará la solución numérica del problema original, proyectando el problema sobre este espacio de dimensión finita.
4. **Resolver las ecuaciones lineales.** Por último se resuelve un sistema algebraico de ecuaciones lineales de la forma $A \{U\} = \{F\}$, para obtener las coordenadas de la solución aproximada en la base de elementos finitos.

4.2. Formulación variacional del problema modelo

El primer paso para aplicar el método de los elementos finitos es considerar una formulación débil del problema. En nuestro caso, para obtener dicha formulación del problema original (41), multiplicamos la primera ecuación de (41) por una función test \vec{v} e integramos en Λ :

$$\int_{\Lambda} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \vec{v} + \rho \omega^2 \int_{\Lambda} \vec{u} \cdot \vec{v} = - \int_{\Lambda} \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (42)$$

Aplicando ahora la integración por partes (fórmula de Green o primera fórmula de Betti), tenemos

$$- \int_{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}) + \int_{\partial \Lambda} (\boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \vec{n}) \cdot \vec{v} + \rho \omega^2 \int_{\Lambda} \vec{u} \cdot \vec{v} = - \int_{\Lambda} \vec{f} \cdot \vec{v}. \quad (43)$$

Teniendo ahora en cuenta que $\boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \vec{n} = \vec{0}$ en $\partial \Lambda$ y reordenando las integrales, llegamos a

$$\int_{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}) - \rho \omega^2 \int_{\Lambda} \vec{u} \cdot \vec{v} = \int_{\Lambda} \vec{f} \cdot \vec{v}. \quad (44)$$

La formulación débil de (41) es

$$\begin{cases} \vec{u} \in (H^1(\Lambda))^3, \\ a(\vec{u}, \vec{v}) = l(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in (H^1(\Lambda))^3, \end{cases} \quad (45)$$

siendo $H^1(\Lambda) = \left\{ u \in L^2(\Lambda) / \nabla u \in (L^2(\Lambda))^3 \right\}$ (las funciones de $L^2(\Lambda)$ son aquellas de cuadrado integrable, $\int_{\Lambda} |u|^2 < \infty$) y

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}) - \rho \omega^2 \int_{\Lambda} \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad (46)$$

$$l(\vec{v}) = \int_{\Lambda} \vec{f} \cdot \vec{v}. \quad (47)$$

Para una deducción más detallada de la formulación variacional anteriormente propuesta pueden consultarse [54, 38].

4.3. MEF aplicado al problema modelo

Una vez formulado el problema en forma débil, el siguiente paso será sustituir el espacio $(H^1(\Lambda))^3$ por un subespacio de dimensión finita W_h en el que buscaremos la solución aproximada resolviendo el problema

$$\begin{cases} \vec{u}_h \in W_h, \\ a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = l(\vec{v}_h) \quad \forall \vec{v}_h \in W_h. \end{cases} \quad (48)$$

Para definir el espacio W_h se divide el dominio de las variables independientes (en nuestro caso Λ) en una partición τ de subdominios, llamados elementos finitos. Nosotros consideraremos tetraedros:

$$\Lambda = \bigcup_{T \in \tau} T \quad , \quad T \text{ tetraedro} \quad (49)$$

Asociado a esta partición τ , se construye el espacio W_h considerando las llamadas funciones de forma del siguiente modo: si denotamos por \mathcal{N} el conjunto de todos los nodos en τ (en el caso de elementos P_1 es el conjunto de todos los vértices de los tetraedros), y por N al número de nodos, se define la “función gorro” escalar φ_j asociada al nodo \vec{z}_j de la triangulación, como la función polinómica a trozos (en el caso P_1 es una función lineal a trozos) tal que

$$\varphi_j(\vec{z}_j) = 1, \quad \varphi_j(\vec{z}_i) = 0 \quad \forall \vec{z}_i \in \mathcal{N} \text{ con } \vec{z}_i \neq \vec{z}_j. \quad (50)$$

Por último, se define la base de W_h mediante

$$(\vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_{3N}) = (\varphi_1 \vec{e}_1, \varphi_1 \vec{e}_2, \varphi_1 \vec{e}_3, \varphi_2 \vec{e}_1, \varphi_2 \vec{e}_2, \varphi_2 \vec{e}_3, \dots, \varphi_N \vec{e}_1, \varphi_N \vec{e}_2, \varphi_N \vec{e}_3) \quad (51)$$

donde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Por ejemplo si Λ fuera el tetraedro de vértices $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$ y sólo considerásemos un elemento, que sería el propio tetraedro, y elementos lineales (P_1), entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\} \\ \varphi_1(x, y, z) = x \\ \varphi_2(x, y, z) = y \\ \varphi_3(x, y, z) = z \\ \varphi_4(x, y, z) = 1 \\ \vec{\eta}_1 = (x, 0, 0), \vec{\eta}_2 = (0, x, 0), \vec{\eta}_3 = (0, 0, x), \vec{\eta}_4 = (y, 0, 0), \dots, \vec{\eta}_{12} = (0, 0, 1) \end{array} \right. \quad (52)$$

El método consiste ahora en aproximar los desplazamientos por una función de W_h , es decir, por una combinación lineal de funciones $\vec{\eta}_l$:

$$\vec{u} \approx \sum_{l=1}^{3N} u_l \vec{\eta}_l =: \vec{u}_h \quad (53)$$

Para obtener las coordenadas u_1, \dots, u_{3N} introducimos (53) en (48) escogiendo $\vec{v}_h = \vec{\eta}_k$, $k = 1, \dots, 3N$. Obtenemos entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{l=1}^{3N} \left(\left(\int_{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}(\vec{\eta}_l) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\eta}_k) \right) - \rho \omega^2 \int_{\Lambda} \vec{\eta}_l \cdot \vec{\eta}_k \right) u_l = \int_{\Lambda} \vec{f} \cdot \vec{\eta}_k \quad k = 1, \dots, 3N. \quad (54)$$

Matricialmente podemos escribir este sistema como

$$[K] \{U\} - \rho \omega^2 [M] \{U\} = \{F\}, \quad (55)$$

siendo

$$K_{lk} = \int_{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}(\vec{\eta}_l) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\eta}_k) \quad (56)$$

$$M_{lk} = \int_{\Lambda} \vec{\eta}_l \cdot \vec{\eta}_k \quad (57)$$

$$F_k = \int_{\Lambda} \vec{f} \cdot \vec{\eta}_k. \quad (58)$$

Una implementación detallada del sistema de ecuaciones (54) para elementos P_1 en *Matlab*TM se presenta en [2].

En este proyecto no se ha generado código propio para implementar el sistema (54), utilizaremos dos códigos de software libre: *FreeFem++* y *Elmer* (véanse los apartados 5.1 y 5.3).

4.4. Resolución del sistema de ecuaciones

El último paso del método de los elementos finitos consiste en resolver el sistema de ecuaciones lineal. En nuestro caso, se trata de resolver

$$[K] \{U\} - \rho\omega^2 [M] \{U\} = \{F\} \quad (59)$$

para obtener las coordenadas $\{U\}$ de \vec{u}_h en la base de elementos finitos, que coinciden a su vez con los valores de \vec{u} en los vértices de los tetraedros al considerar mallados tetraédricos y elementos finitos de tipo P_1 .

El sistema puede resolverse, en principio, mediante métodos directos como el método del gradiente conjugado, o iterativos como GMRes.

Un método alternativo es el método de superposición de modos (véase [6]). El método se basa en buscar el vector $\{U\}$ como una combinación lineal de autovectores generalizados del problema (59): como $[K]$ y $[M]$ son simétricas, $[K]$ es semidefinida positiva y $[M]$ definida positiva, el problema de autovalores generalizado

$$[K] \{V\} = \mu [M] \{V\} \quad (60)$$

tiene $3N$ autovalores reales $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{3N}$ con autovectores asociados $\{V_1\}, \dots, \{V_{3N}\}$ que forman una base de \mathbb{R}^{3N} . Además, esta base se puede escoger de forma que los vectores sean $[M]$ -ortonormales:

$$\{V_j\}^T [M] \{V_i\} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}. \quad (61)$$

Se trata ahora de buscar $\{U\}$ como una combinación lineal de los vectores de esta base

$$\{U\} = \sum_{k=1}^{3N} \alpha_k \{V_k\}, \quad (62)$$

donde las nuevas incógnitas son $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N} \in \mathbb{R}$.

Si sustituimos (62) en (59):

$$\sum_{k=1}^{3N} \alpha_k [K] \{V_k\} - \rho\omega^2 \sum_{k=1}^{3N} \alpha_k [M] \{V_k\} = \{F\}. \quad (63)$$

Utilizando ahora que $[K] \{V_k\} = \mu_k [M] \{V_k\}$, llegamos a

$$\sum_{k=1}^{3N} \mu_k \alpha_k [M] \{V_k\} - \rho\omega^2 \sum_{k=1}^{3N} \alpha_k [M] \{V_k\} = \{F\}, \quad (64)$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{3N} (\mu_k - \rho\omega^2) \alpha_k [M] \{V_k\} = \{F\}. \quad (65)$$

Si proyectamos ahora esta ecuación sobre cada uno de los autovectores $\{V_{k'}\}$, es decir, si multiplicamos (65) escalarmente con $\{V_{k'}\}$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{3N} (\mu_k - \rho\omega^2) \alpha_k \{V_{k'}\}^T [M] \{V_k\} = \{V_{k'}\}^T \{F\}, \quad (66)$$

y utilizando (61),

$$(\mu_k - \rho\omega^2) \alpha_k = \{V_k\}^T \{F\}. \quad (67)$$

Por tanto,

$$\alpha_k = \frac{1}{(\mu_k - \rho\omega^2)} \{V_k\}^T \{F\}. \quad (68)$$

Una vez calculados los coeficientes α_k , $\{U\}$ se obtiene sustituyendo en (62).

Tras resolver diferentes casos por éste método, se comprobó que los resultados eran idénticos cuando se utilizaban todos los modos. Sin embargo, el interés en este tipo de resolución radica en la efectividad, en la posibilidad de ahorrar tiempo y recursos computacionales, escogiendo de forma adecuada un número reducido de modos que permita mantener la precisión en la solución del problema. Después de comparar los resultados y las características del método de superposición de modos con el método de resolución directa, se extrajeron las siguientes conclusiones:

- Las soluciones obtenidas usando ambos procedimientos son iguales, ya que tanto los errores numéricos como de redondeo del ordenador se mantienen constantes en ambos métodos.

- Si se quieren resolver varios problemas como (41) procedentes de emitir desde distintos palpadores y a distintas frecuencias, considerando para ello la misma malla, entonces el método resulta ventajoso ya que aunque la resolución del problema de autovalores generalizado para obtener $\{V_k\}$ es caro computacionalmente, sólo hay que hacerlo una vez.

El hecho de considerar una frecuencia distinta sin modificar la posición del palpador, involucra únicamente tener que recalcular los coeficientes α_k utilizando (68), donde $\{F\}$ no cambia. Por tanto, sólo es necesario multiplicar $\{V_k\}^T \{F\}$ (previamente calculado para la anterior frecuencia) por el factor $\frac{1}{\mu_k - \rho\omega^2}$. Si se resuelve directamente (59), la matriz cambia y hay que volver a “invertirla”.

Si para una misma frecuencia emitimos desde un palpador distinto, el cálculo de los nuevos coeficientes α_k se reduce a realizar un nuevo producto $\{V_k\}^T \{F\}$, correspondiente al nuevo vector $\{F\}$. Si resolvemos directamente (59), la matriz del sistema no cambia, sólo el término independiente.

- En muchos de los problemas resueltos tan sólo resultaba imprescindible tener en cuenta los primeros p modos, siendo $p \ll 3N$, para conseguir una buena aproximación a la solución real del problema, es decir, aproximar $\{U\} = \sum_{k=1}^{3N} \alpha_k \{V_k\}$ por $\{U_p\} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \{V_k\}$.

En general, la estructura considerada, junto con la distribución espacial y frecuencia de las cargas, determinan el número de modos que deberán ser usados. Una posibilidad para estimar el error cometido en este método es

$$\epsilon_p = \frac{\|\{F\} - ([K] \{U_p\} - \rho\omega^2 [M] \{U_p\})\|_2}{\|\{F\}\|_2}, \quad (69)$$

siendo p el número de modos considerados. Otra alternativa es estimar el error mediante $\epsilon_p = |\beta_{p+1}|$, ya que los coeficientes $|\beta_k| = \left| \frac{1}{\mu_k - \rho\omega^2} \right|$ decrecen a partir de un cierto k_0 conforme k aumenta (μ_k es una sucesión creciente). Por tanto, la contribución más importante en (62) es la proporcionada por los primeros autovectores (véase la Figura 18, donde se representa $|\beta_k|$ en función de k). En el caso de que ϵ_p sea superior a la exactitud buscada, se deberá aumentar el número de modos empleados en la resolución del problema.

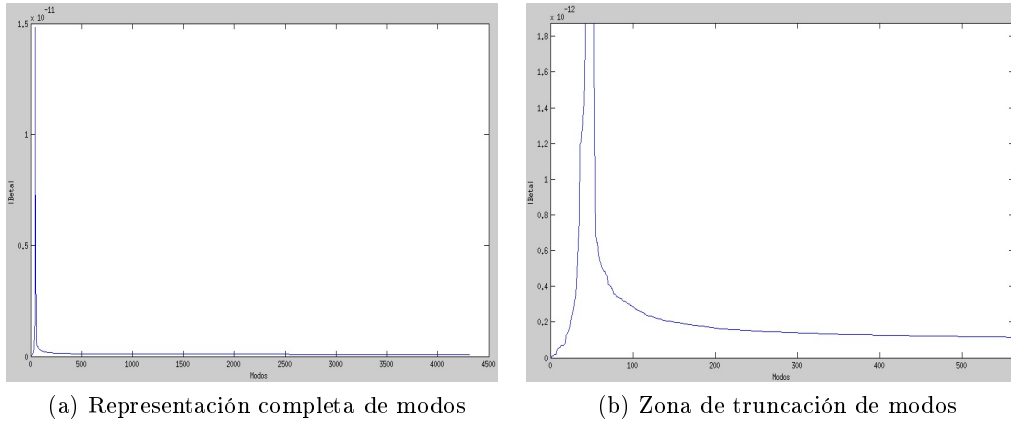


Figura 18: Estimación del número de modos necesario

4.5. Frecuencias propias

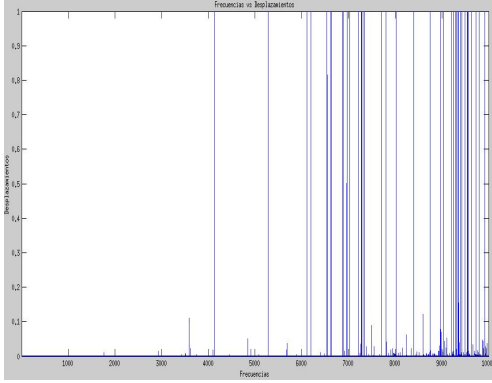
Las frecuencias propias, naturales o características de un sistema, se definen como aquellas para las cuales éste alcanza su máximo grado de oscilación. Éstas aparecen en medios finitos, y debemos evitarlas a la hora de excitar nuestra placa, puesto que emitir a esas frecuencias implica que la derivada topológica no sea capaz de localizar el defecto. Esto se debe a que la diferencia de medidas entre la placa con grieta y sin grieta no puede ser apreciada.

De forma ideal, al excitar un modo propio la amplitud tiende a infinito, sin embargo, en la realidad aparecen diferentes tipos de amortiguamiento que impiden este hecho. En cualquier caso, pese a la existencia de dichos amortiguamientos, la amplitud es muy elevada, y por tanto no se evita el fracaso de las medidas para frecuencias propias.

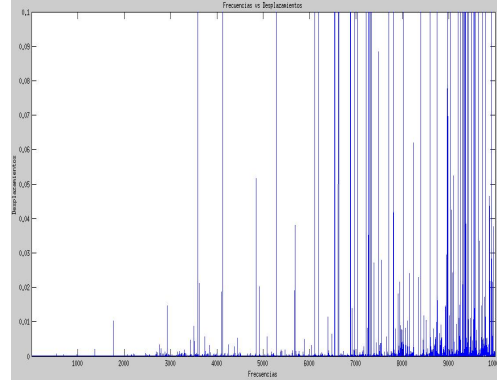
En el caso de la placa sin defectos, Ω , las frecuencias y modos propios serán conocidos, mientras que en el caso de la placa con defectos, $\Omega \setminus D$, se deben calcular de forma numérica. En nuestro caso, extraeremos las frecuencias propias a través de *Elmer*, y para corroborar la buena actuación de este software también se realizará un barrido en frecuencias que será representado en *Matlab*TM. Véase un ejemplo en la Figura 19.

5.348/48188945E+002 6.940643066406E+002 9.7658/8906250E+002 1.02/34655/61/E+003 1.1941/553/109E+003 1.32/316406250E+003
1.363898576172E+003 1.442670418156E+003 1.499891967773E+003 1.556315307617E+003 1.610727661133E+003 1.746744384766E+003 1.76497716992E
+003 1.798785522461E+003 1.963543823242E+003 2.074999267578E+003 2.086581220703E+003 2.138201171875E+003 2.157642578125E+003
2.176773925781E+003 2.282127441406E+003 2.357915283203E+003 2.471759765625E+003 2.490112060547E+003 2.573384521404E+003 2.609363525391E
+003 2.619757080078E+003 2.664115722656E+003 2.692531005859E+003 2.795595947266E+003 2.820342529297E+003 2.849350830078E+003
2.932167236328E+003 2.988162841797E+003 3.006699218750E+003 3.015337402344E+003 3.095519531250E+003 3.128816650391E+003 3.172503173828E
+003 3.180845703125E+003 3.243827880859E+003 3.355996337891E+003 3.383895507812E+003 3.402844238281E+003 3.437454345703E+003
3.453904541016E+003 3.479266357422E+003 3.532526123047E+003 3.563802812500E+003 3.587546630859E+003 3.673979248047E+003 3.718313964844E
+003 3.744585449219E+003 3.796911621094E+003 3.828758056641E+003 3.878019775391E+003 3.928823974609E+003 3.945748779297E+003
3.976455810547E+003 4.017487304688E+003 4.065716552734E+003 4.108983886719E+003 4.130525390625E+003 4.153587402344E+003 4.240544433594E
+003 4.271286621094E+003 4.305852539062E+003 4.409631835938E+003 4.423760253906E+003 4.443323730469E+003 4.492884765625E+003
4.514469238281E+003 4.563235351562E+003 4.582994628906E+003 4.599557617188E+003 4.633187500000E+003 4.668889160156E+003 4.686777343750E
+003 4.739430664062E+003 4.755343261719E+003 4.832468750000E+003 4.865417480469E+003 4.887736816406E+003 4.948603515625E+003
4.979719726562E+003 4.98607660156E+003 5.024648925781E+003 5.045931640625E+003 5.061776855469E+003 5.11035156250E+003 5.153427734375E
+003 5.200785156250E+003 5.223733886719E+003 5.251579101562E+003 5.267254882812E+003 5.330752929688E+003 5.359076171875E+003
5.382736816406E+003 5.432422851562E+003 5.454331054688E+003 5.480064941406E+003 5.556666503906E+003 5.602043945312E+003 5.624896972650E
+003 5.636516113281E+003 5.673886718750E+003 5.712043945312E+003 5.726135742188E+003 5.770662597656E+003 5.794221191406E+003
5.823064941406E+003 5.876385742188E+003 5.895615234375E+003 5.939779296875E+003 5.999819335938E+003 6.019588867188E+003 6.066051757812E
+003 6.089637207031E+003 6.131970703125E+003 6.164779785156E+003 6.17445800781E+003 6.229271972656E+003 6.273450195312E+003
6.326734863281E+003 6.382325195312E+003 6.391277343750E+003 6.413956542969E+003 6.44939596094E+003 6.504519042969E+003 6.528318359375E
+003 6.568979003906E+003 6.632598632812E+003 6.672813964844E+003 6.707210937500E+003 6.718408691406E+003 6.766117675781E+003
6.802885742188E+003 6.817526855469E+003 6.841025878906E+003 6.887176757812E+003 6.950540039062E+003 6.983557128906E+003 6.998946289062E
+003 7.067864257812E+003 7.104211914062E+003 7.10340632812E+003 7.178893554688E+003 7.208099609375E+003 7.243667968750E+003
7.293140136719E+003 7.318521972656E+003 7.41707958944E+003 7.431848144531E+003 7.479940429688E+003 7.510931640625E+003 7.529448242188E
+003 7.558690917969E+003 7.598547851562E+003 7.618642089044E+003 7.674585937500E+003 7.687680664062E+003 7.709265136719E+003
7.745349121094E+003 7.773754394531E+003 7.841623046875E+003 7.892644531250E+003 7.909663085938E+003 7.942097167969E+003 7.97111572656E
+003 8.017470214844E+003 8.030052734375E+003 8.066513183594E+003 8.113917968750E+003 8.177208007812E+003 8.221284179688E+003
8.284360351562E+003 8.297945312500E+003 8.322342773438E+003 8.330154296875E+003 8.384184570312E+003 8.399963867188E+003 8.477300781250E
+003 8.494591796875E+003 8.514082031250E+003 8.532108398438E+003 8.606580078125E+003 8.628243164062E+003 8.661535156250E+003
8.736200195312E+003 8.755437500000E+003 8.782903160855E+003 8.825193882460E+003 8.84054428831E+003 8.862430098540E+003 8.941465045742E
+003 8.952837860512E+003 8.960621210407E+003 8.999339498852E+003 9.022439560892E+003 9.069560865316E+003

(a) Frecuencias propias numéricas



(b) Barrido en frecuencias I



(c) Barrido en frecuencias II

Figura 19: Frecuencias propias

Las características de la placa ensayada para la Figura 19 tiene unas dimensiones de $5 \times 2 \times 0,2m^3$ y se excita a través de un palpador superficial (véase la Figura 13b), mediante una excitación de una delta de Dirac de peso -1.

En la Figura 19 se pueden apreciar varias características. Entre ellas, la más reseñable es el incremento de frecuencias propias conforme se aumenta la frecuencia, hecho que nos dificulta la elección de zonas de valle (zonas entre frecuencias propias), en las cuales escogeremos nuestras frecuencias. También se debe aclarar que en el ejemplo el barrido en frecuencias, se ha realizado desde 0 Hz hasta 10000 Hz, recorriendo el intervalo de hercio en hercio. Por ello, algunas frecuencias propias aparecen más excitadas que otras, ya que depende de la proximidad de ese número entero a la frecuencia exacta, que se pueden ver en el archivo *Elmer* de salida, Figura 19a.

En el capítulo 6 se escogerán las frecuencias evitando excitar modos propios de nuestra placa con defectos y sin defectos. Obviamente, si uno desconoce si la placa está dañada o no, o el tipo de daño presente en la placa, no se puede saber de antemano si la frecuencia seleccionada es o no frecuencia propia. Sin embargo, sí que se sabe que al considerar pequeñas imperfecciones, las frecuencias propias varían poco respecto de las de la placa sin defecto. Más aún, al calcular la derivada topológica, si se hubiera escogido una frecuencia propia o una frecuencia próxima a una propia, la contribución en esa frecuencia no va a tener información relevante sobre la localización de las imperfecciones, pues dicha contribución se perderá, siendo, por tanto, no decisiva para la reconstrucción final.

5. Software

Como se ha señalado en el capítulo anterior, en este proyecto se ha optado por utilizar el Método de los Elementos Finitos, tanto para simular los datos medidos (resolviendo para ello el problema directo en la placa con defectos), como para resolver los problemas directos y adjuntos involucrados en el cálculo de la derivada topológica.

La ejecución de este proyecto se comenzó con *FreeFem++*, software capaz tanto de resolver los problemas anteriormente citados, como de implementar la fórmula de la derivada topológica y visualizar los resultados. Sin embargo, encontramos dificultades al aumentar el tamaño de la malla (requisito imprescindible al simular problemas a frecuencias altas), en vista de lo cual, optamos por buscar un mallador mejor y sobradamente contrastado, tal y como es el caso de *Gmsh*.

Puesto que se precisó de un cambio de mallador, también se decidió aprovechar para escoger un software multifísico más potente, *Elmer*, que permite una buena implementación del problema armónico que se resuelve en este proyecto.

Para realizar los cálculos finales de la derivada topológica extraemos los datos de *Elmer*, con la ayuda de *Python*, y los combinamos en *MatlabTM*. Una vez obtenido el valor de la derivada topológica en todo el dominio de la placa, éste se trasladará a ParaView para ser visualizado. De nuevo se empleará lenguaje Python para enlazar los dos software (véase la Figura 20).

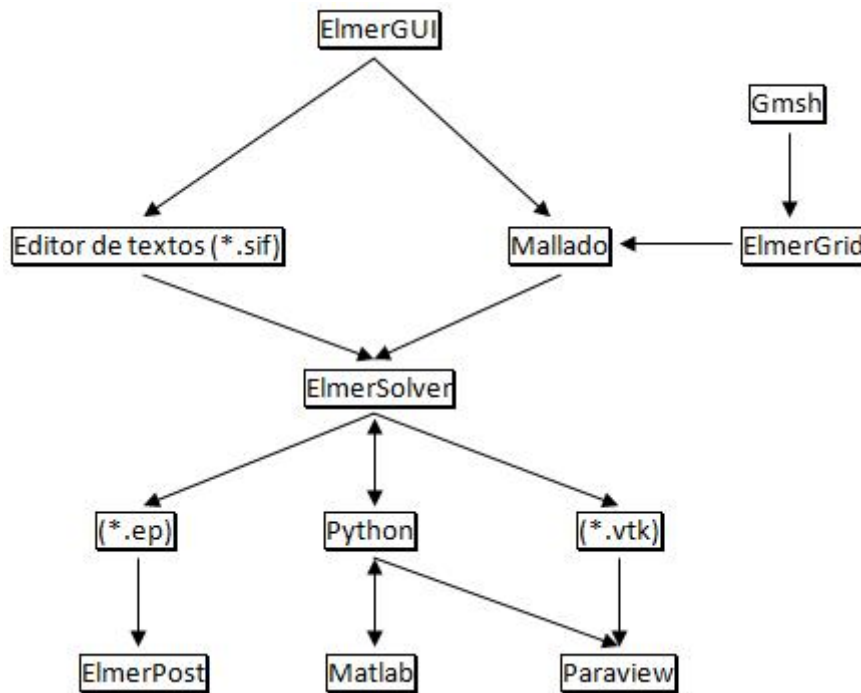


Figura 20: Flujo de datos

Todos los cálculos de este proyecto, salvo aquellos realizados con el software *FreeFem++*, del cual se hablará a continuación, han sido desarrollados en dos clústers ubicados en el Departamento de Fundamentos Matemáticos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos (ETSIA - UPM). Estos clústers presentan las siguientes características:

REFERENCIA	NÚCLEOS	PROCESADORES	RAM
<i>HYDRA 2</i>	8	3,20 GHz	48 GB
<i>HYDRA 3</i>	12	3,64 GHz	96 GB

Tabla 2: Características de los clústers

El uso de este tipo de ordenadores accionados en remoto se debe al hecho de que la capacidad computacional de un ordenador convencional ralentiza el proceso de resolución, y en muchos casos resultará insuficiente. Este es el caso de *FreeFem++*, en el cual su incapacidad en la ejecución correcta de casos 3D suponía que al superar determinado número de grados de libertad, el programa se interrumpiera debido a la escasez de memoria.

Estos clústers presentan la ventaja de permitir ejecutar casos grandes en paralelo, es decir, a través de varios núcleos simultáneamente, permitiendo que casos aproximadamente superiores a cien mil elementos se ejecuten de una forma más óptima a través de este sistema. Casos de un tamaño menor no resultarán efectivos al ejecutarse en paralelo, puesto que el tiempo de interconexión entre núcleos supondría un tiempo mayor que el propio de ejecución. El número de elementos o grados de libertad del problema dependerá de la precisión buscada, ya que como es lógico, un mayor número de elementos implicará una mejor aproximación a la solución real, tal y como se ha explicado en el método de los elementos finitos.

Para finalizar esta introducción, cabe resaltar el hecho de que todos los software utilizados son de código abierto, *open source* (ver [70, 41, 60]), a excepción de *MatlabTM*. La importancia de todos y cada uno de ellos es digna de mención, ya que son la base de todo el trabajo aquí mostrado.

5.1. FreeFem++

FreeFem++ es un solver de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que emplea el método de los elementos finitos. Presenta su propio lenguaje de programación en C++, y su uso se extiende a la resolución de sistemas multifísicos no lineales tanto en 2D como en 3D. Se crea con el objetivo de paliar la necesidad de manipular e interpolar datos sobre diferentes tipos de mallas a través de un único programa. Esta versión es la tercera, desde que en el año 1992 se creara *FreeFem*.

Su entorno de trabajo se basa en un editor de texto. Los pasos a seguir para la creación de un caso son:

1. Cargar los paquetes necesarios para el mallado 3D.
2. Generar la geometría (dominio) de forma paramétrica.
3. Realizar un mallado progresivo desde 2D a 3D. El mallado 3D puede ser mediante extrusión (indicando el espesor y número de capas que contiene) o a partir de la superficie externa del volumen que se quiere mallar.
4. Formular el problema de forma variacional, indicando y separando la parte bilineal, ecuación (46), de la lineal, ecuación (47).
5. Solicitar la impresión en pantalla o en consola de las imágenes o datos requeridos.

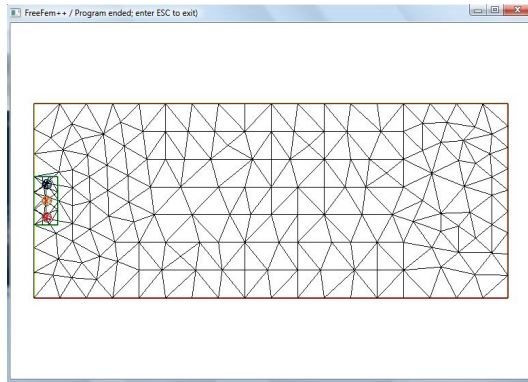
Para una descripción más detallada puede consultarse [36].

```

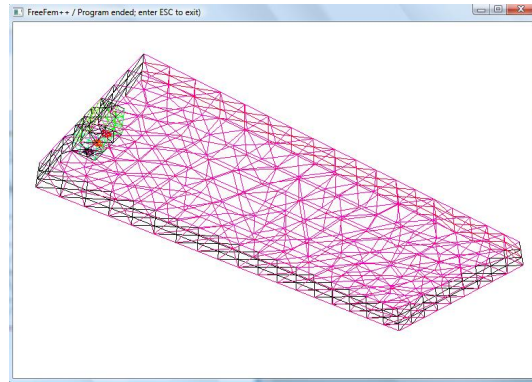
71 : problem navier(u,v,w,[uu,vv,ww])=int3d(th3D)(lambda* (dx(u)+dy(v)+dz(w))
72 : (dx(u)+dy(v)+dz(ww))
73 : + 2.*uu*( [dx(u),dy(v),dz(w),(dz(v)+dy(u))/sqrt2,(dz(u)
74 : +dx(u))/sqrt2,(dy(u)+dx(v))/sqrt2] '* [dx(u),dy(v),dz(ww),(dz(v)+dy(u))/s
75 : qrt2,(dz(u)+dx(v))/sqrt2,(dy(u)+dx(v))/sqrt2] )
76 : - rho*omega*omega*(u*uu+v*vv+w*ww))
77 : - int3d(th3D)(f'*[uu,vv,ww])
78 : - int2d(th2D)(g'*[uu,vv,ww])
79 : + on(20,u=10);
80 : navier;
81 : plot(u,v,w,wait=1,din=3);
82 :
83 : sizestack + 1024 =3416 < 2392 >
84 :
85 :
86 :
87 :
88 :
89 :
90 :
-- mesh: Nb of Triangles = 312, Nb of Vertices 184
-- mesh: Nb of Triangles = 16, Nb of Vertices 15
-- mesh: Nb of Triangles = 43, Nb of Vertices 38
-- Build Nodes/DF on mesh : n.v. 736, n. elmt. 2808, n b. elmt. 948
-- nb of Nodes 4753 nb of DoF 14259 Dfon=3308
-- F2Space: Nb of Nodes 4753 Nb of DoF 14259
-- Solve :
-- min -812.017 max 10
times: compile 0.407s, execution 12.753s, mpi rank:0

```

(a) Consola



(b) Placa 2D



(c) Placa 3D

Figura 21: FreeFem++

Como se puede apreciar en la Figura 21a, la consola muestra datos como el número de elementos, los grados de libertad del sistema, o los tiempos relevantes del proceso de resolución.

En el punto 1 se ha mencionado que se deben cargar paquetes de mallado, sin embargo, no se ha mencionado que también se pueden¹ cargar librerías dinámicas (*Parallel Sparse Solvers*) correspondientes a los solvers que se pretenden utilizar. Estas librerías pretenden mejorar el rendimiento de *FreeFem++* dando opción de cargar el solver que más se ajuste a nuestras necesidades. Estos solvers pueden ser secuenciales o paralelos, a la vez que directos o iterativos.

Previo a la resolución de nuestro problema modelo se hicieron varias pruebas con el fin de calibrar correctamente el software. Para ello se decidió comparar los resultados con los publicados en [5], donde se presenta un estudio detallado de la solución de las ecuaciones de Lamé en un problema modelo (*benchmark*).

El sistema a resolver será

$$\boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) = \lambda \operatorname{div}(\vec{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}) \quad \text{en } \Omega \quad (70)$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \vec{f} \quad \text{en } \Omega \quad (71)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{en } \partial\Omega_D \quad (72)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\vec{n} = \vec{g} \quad \text{en } \partial\Omega_N. \quad (73)$$

Nótese que el problema es similar al considerado a lo largo de este proyecto, pero el término $\rho\omega^2\vec{u}$ no aparece en la ecuación (71). Se seleccionarán los siguientes datos:

$$\Omega = (-1, 1)^3 \setminus [0, 1]^3 \quad (74)$$

$$\begin{cases} E = 200000 \\ \nu = 0, 3 \end{cases} \quad (75)$$

Introduciendo (75) en (14) y (15) se obtienen λ y μ , respectivamente. Las condiciones de contorno vendrán dadas por la tabla siguiente:

¹Cuando no se elige una librería concreta, *FreeFem++* carga por defecto el paquete UMFPACK (*Unsymmetric MultiFrontal sparse LU factorization Package*).

CARA	u_x	u_y	u_z	g_x	g_y	g_z
$x = -1$				-1000	0	0
$y = -1$				0	0	0
$z = -1$				0	0	0
$x = 0$	0	0	0			
$y = 0$	0	0	0			
$z = 0$	0	0	0			
$x = 1$	0				0	0
$y = 1$		0		0		0
$z = 1$			0	0	0	

Tabla 3: Condiciones de contorno del sistema de Lamé

Las columnas relativas a \vec{u} implican condiciones de Dirichlet ($\partial\Omega_D$), mientras que aquellas relativas a \vec{g} implican condiciones de Neumann ($\partial\Omega_N$).

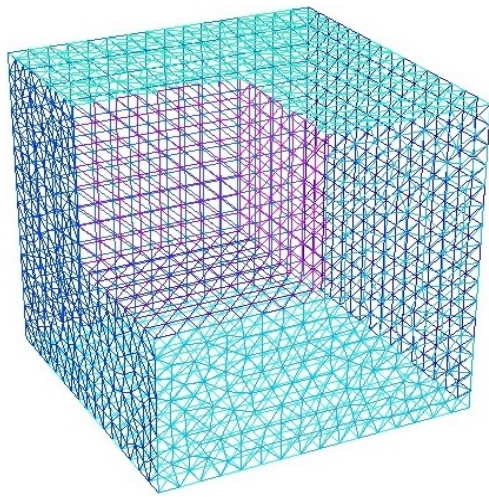
Utilizando *FreeFem++* con elementos P_1 y las características que se recogen en la Tabla 4, obtuvimos los resultados que se muestran en la Tabla 5 y en la Figura 22. Los resultados numéricos de la Tabla 5 son idénticos a los publicados en [5].

NODOS	DOF	TIEMPO DE COMPILACIÓN	TIEMPO DE EJECUCIÓN
11199	33597	2,674 s	30,365 s
Ordenador: Intel(R) Pentium(R) D CPU 3,00GHz 3,00GHz / RAM 2,00GB			

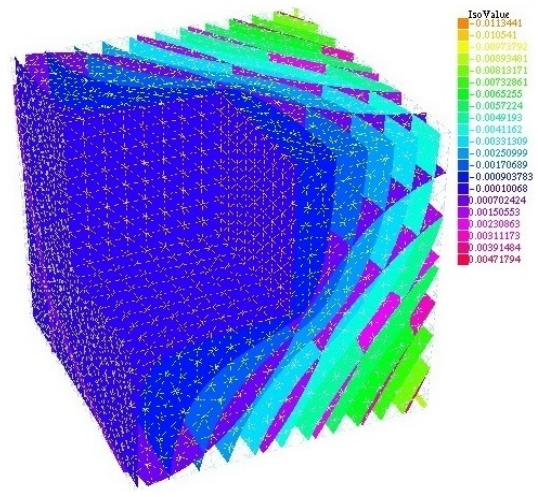
Tabla 4: Características MEF - Problema de Lamé

$x = y = z$	u_x	u_y	u_z
0,0000	0,000 e+00	0,000 e+00	0,000 e+00
-0,0625	-2,238 e-03	7,479 e-04	7,742 e-04
-0,1250	-3,167 e-03	1,035 e-03	1,049 e-03
-0,1875	-3,880 e-03	1,253 e-03	1,264 e-03
-0,2500	-4,507 e-03	1,453 e-03	1,461 e-03
-0,3125	-5,094 e-03	1,644 e-03	1,652 e-03
-0,3750	-5,655 e-03	1,835 e-03	1,842 e-03
-0,4375	-6,205 e-03	2,026 e-03	2,032 e-03
-0,5000	-6,747 e-03	2,219 e-03	2,224 e-03
-0,5625	-7,281 e-03	2,413 e-03	2,418 e-03
-0,6250	-7,812 e-03	2,609 e-03	2,613 e-03
-0,6875	-8,340 e-03	2,806 e-03	2,809 e-03
-0,7500	-8,864 e-03	3,003 e-03	3,006 e-03
-0,8125	-9,386 e-03	3,201 e-03	3,202 e-03
-0,8750	-9,906 e-03	3,398 e-03	3,399 e-03
-0,9375	-1,042 e-02	3,595 e-03	3,595 e-03
-1,0000	-1,094 e-02	3,791 e-03	3,791 e-03

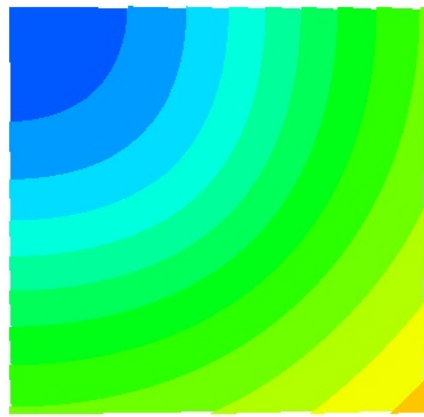
Tabla 5: Desplazamientos del Problema de Lamé



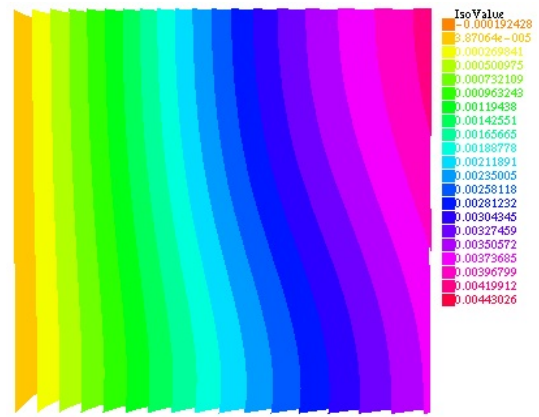
(a) Dominio



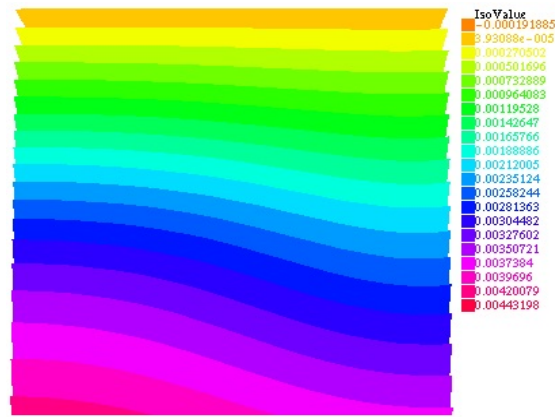
(b) Campo de Desplazamientos Global



(c) u_x en la cara $x = -1$



(d) u_y en la cara $x = -1$



(e) u_z en la cara $x = -1$

Figura 22: Solución gráfica del Problema de Lamé

Sin embargo, al abordar la resolución de nuestro problema para la ecuación de Navier-Cauchy observamos algunas deficiencias. Cuando precisábamos de muchos elementos para obtener la precisión requerida (como es el caso de frecuencias de excitación elevadas), el programa se detenía. Se probaron distintos solvers en paralelo, así como distintos preconditionadores, pero los resultados no fueron satisfactorios. Observamos además que el mallador de *FreeFem++* en dominios tridimensionales con defectos no genera refinamientos finos satisfactorios, por lo que decidimos cambiar de mallador (*Gmsh*) y a un software multifísico más potente (*Elmer*).

5.2. Gmsh

La discretización del dominio es una de las fases más importantes de todo el proceso de resolución del problema a través del método de los elementos finitos. Esto se debe principalmente a que una buena elección conlleva la optimización de los recursos de memoria necesarios, el aumento de la velocidad de generación de las soluciones y la mejora en la exactitud de los resultados obtenidos. Cada una de las divisiones del dominio se denomina elemento. Tal y como se mencionó anteriormente, éstos se pueden clasificar según las dimensiones del dominio del problema y sus características:

DIMENSIONES DEL PROBLEMA	ELEMENTOS
<i>1D</i>	Segmentos de línea
<i>2D</i>	Triángulos y cuadriláteros
<i>3D</i>	Tetraedros, pentaedros y hexaedros

Tabla 6: Dimensiones vs Elementos de mallado

Existe gran variedad de métodos a emplear para realizar un mallado coherente, sin embargo, no existe uno concreto que cumpla con todas las exigencias de calidad: bajo coste computacional, capacidad para controlar ciertas características de la malla como la distribución de nodos, etc. Por ejemplo, se pueden encontrar técnicas generales como las de frente de avance o las de Delaunay-Voronoi, capaces de mallar geometrías complejas pero que requieren de un gran gasto computacional. Sin embargo, otras técnicas denominadas algebraicas, permiten realizar el mallado a elevada velocidad, pero no a geometrías relativamente complejas. Por ello, tanto la geometría del dominio, como el gasto computacional, son los principales factores determinantes a la hora de elegir un método u otro.

En este proyecto no se pretende realizar un estudio pormenorizado de cada uno de los métodos para generar mallados (véanse [19, 18, 17] para más detalles), sin embargo se han estudiado concienzudamente los requisitos buscados a la hora de realizar el simulador, y se han elegido tanto el mallador como el método de una forma coherente con los objetivos planteados.

Hemos optado por utilizar mallas no estructuradas. Este tipo de mallas no presentan una conectividad aguda, simplemente intentan adaptarse de la mejor manera

posible al contorno del dominio, haciendo depender las relaciones entre nodos del método a emplear. Utilizaremos elementos tetraédricos, obtenidos por el método de Delaunay-Voronoi. Otras posibles elecciones son mallas estructuradas (cuya conectividad entre nodos se establece según un patrón reticular), o mallas obtenidas por métodos multibloque. En la Figura 23 se muestran esquemáticamente los tres tipos de malla mencionados.

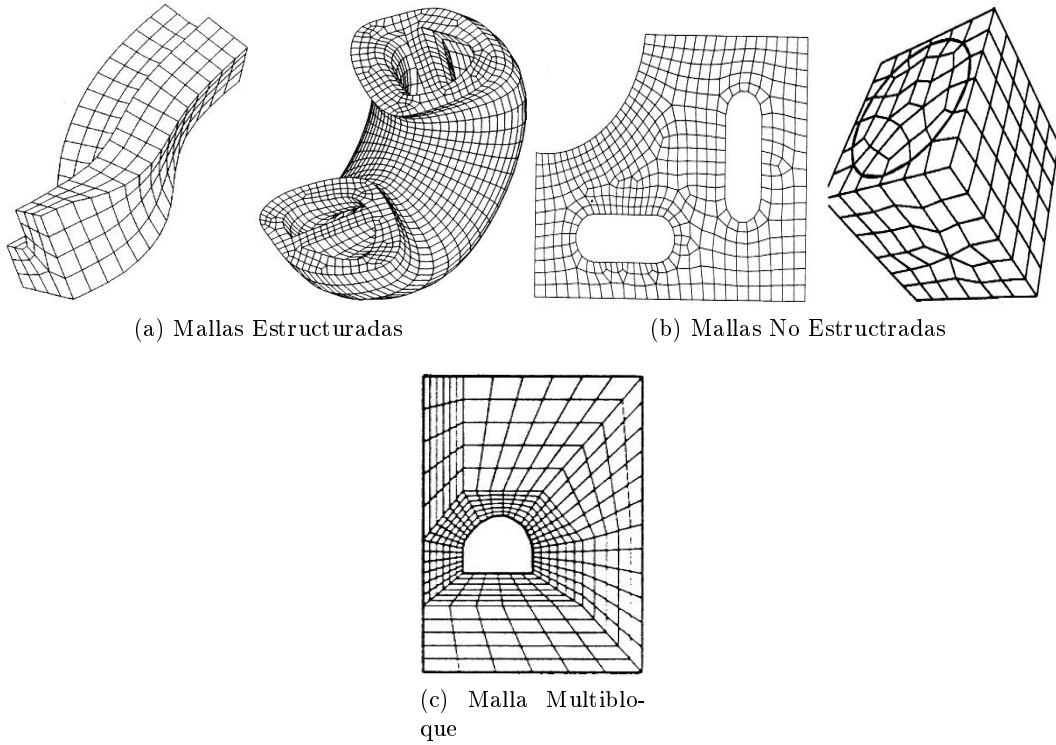


Figura 23: Tipos de mallas [19]

Después de haber observado deficiencias en el mallador tridimensional de *FreeFem++*, optamos por trabajar con un mallador más potente y cuyo uso está más extendido en la comunidad científica: *Gmsh*.

Gmsh es un mallador tridimensional de elementos finitos. También incluye un generador propio de geometrías y un post-procesador. Su objetivo de diseño es proporcionar una rápida y ligera herramienta de mallado. Su entrada de datos debe hacerse de forma paramétrica, siempre que no se utilice el generador de geometrías. Sus capacidades de visualización son muy avanzadas (véanse [27, 65]).

Gmsh es construido en torno a cuatro módulos: geometría, mallado, solver y post-procesador. Todas las instrucciones de geometría, mallado, solver y post-procesamiento se prescriben de forma interactiva utilizando la interfaz gráfica de usuario (GUI, *Graphic User Interface*) o mediante archivos de texto utilizando el lenguaje propio de programación de *Gmsh*. Acciones interactivas generan bits de idiomas en los

archivos de entrada, y viceversa. Esto hace que sea posible automatizar todos los tratamientos, mediante bucles, condicionales y llamadas al sistema externo. Se realizará a continuación una descripción de cada uno de los módulos, centrándonos sobre todo en la parte de mallado, ya que es aquella para la cual emplearemos este software.

1. Geometría: Definición geométrica de la entrada.

Gmsh utiliza una representación por fronteras (BREP) para describir geometrías. Los modelos se crean en un flujo de abajo hacia arriba (*bottom-up flow*), a través de la sucesiva definición de puntos, líneas orientadas (segmentos de líneas, círculos, elipses, splines, ...), superficies orientadas (superficies planas, superficies regladas, ...) y volúmenes. Se pueden generar grupos de entidades geométricas (grupos físicos) a partir de entidades geométricas elementales. Además, el lenguaje de programación de *Gmsh* permite que todas las entidades geométricas sean completamente parametrizables.

2. Mallado: Generador de mallado de elementos finitos.

Una malla de elementos finitos es una división de un subconjunto dado del espacio tridimensional por elementos geométricos elementales de diferentes formas. En el caso de *Gmsh*: líneas, triángulos, cuadriláteros, tetraedros, prismas, hexaedros y pirámides. Todas las mallas generadas por *Gmsh* son consideradas como no estructuradas, incluso si se han generado de una manera estructurada, por ejemplo, a través de una extrusión. Esto implica que los elementos geométricos elementales se definan solamente a través de una lista ordenada de sus nodos, pero que no presentan una relación de orden predefinida entre cualesquiera de ellos.

La generación de mallas se realiza con el mismo flujo de abajo hacia arriba que en la creación de la geometría: las líneas se discretizan primero; el mallado de las líneas se emplea para engranar con el mallado de las superficies; por último, el mallado de las superficies se emplea para los volúmenes. En este proceso la malla de la entidad tan sólo está limitada por la malla de su límite. Por ejemplo, en tres dimensiones, los triángulos que discretizan una superficie se verán obligados a ser caras de tetraedros en la malla 3D final sólo si la superficie es parte de la frontera del volumen. A su vez, los elementos de línea que discretizan una curva se verán obligados a ser bordes de los tetraedros de la malla 3D tan sólo si la curva es parte de la frontera de una superficie, y por sí misma, parte de la frontera de un volumen. Para el caso de un nodo discretizando un punto interior de un volumen, éste se verá obligado a ser el vértice de un tetraedro si cumple el razonamiento anterior. Esto asegura la conformidad de la malla cuando, por ejemplo, dos superficies comparten una línea común. Se puede pensar que esto también puede conllevar un problema si una geometría elemental de orden $(n - 1)$ no forma parte de la frontera de la geometría elemental siguiente, orden (n) . Sin embargo, si se pretende que dicha entidad tenga relevancia a la hora de realizar el mallado, esto se puede indicar dentro del código de programación de *Gmsh*. Éste es nuestro caso, y por tanto debemos indicarle al mallador que nos interesa la zona próxima a los palpadores, y que por tanto requerimos de un mallado adecuado en esa zona.

Cada paso del mallado se ve limitado por un campo de tamaño que prescribe el tamaño deseado de los elementos de la malla. Estos campos pueden ser uniformes, asociando longitudes características a los puntos de la geometría, o definidos por campos generales. Además, para cada paso de mallado, todas las directivas de malla estructurada se ejecutan primero (si las hubiera), creando así restricciones adicionales para las partes no estructuradas.

3. Solver: Interfaz de solver externo.

Este módulo se caracteriza por la capacidad de enlazar solvers externos con *Gmsh*. Esto es posible a través de Unix o *sockets* TCP/IP, consiguiendo así realizar diferentes procesos y después visualizarlos en el módulo de post-procesador, sin necesidad de tener que salir de *Gmsh*. El solver predeterminado por defecto es GetDP. Nosotros no emplearemos este módulo.

4. Post-procesador: Campo de visualización escalar, vectorial y tensorial.

Gmsh permite cargar y manipular campos escalares, vectoriales y tensoriales junto con la geometría y la malla. Los campos escalares se representan a través de isolíneas, isosuperficies o mapas de color, mientras que los campos vectoriales lo hacen a través de flechas tridimensionales o mapas de desplazamiento. Al igual que en el resto de los módulos, todas las opciones de post-procesamiento son accesibles tanto de forma interactiva como mediante scripts de entrada.

En la Figura 24 se exponen una serie de imágenes para comprender de una manera más clara el funcionamiento de *Gmsh*:

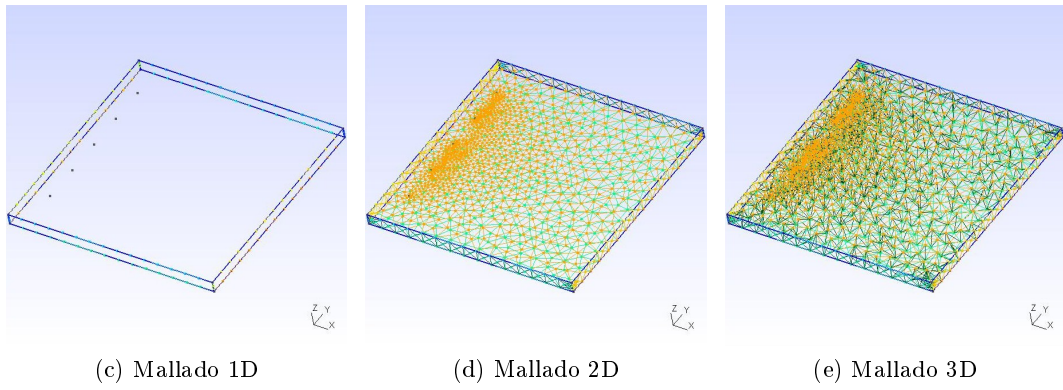
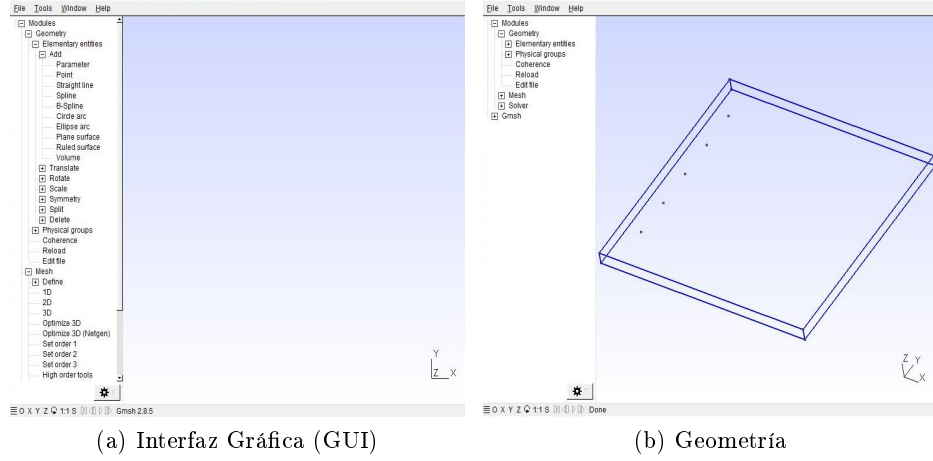


Figura 24: Gmsh

El mallado realizado en la Figura 24 tiene asociados los siguientes valores característicos:

MALLADO	VÉRTICES	ELEMENTOS	TIEMPO
1D	133	145	0,000001 s
2D	1403	2947	0,543001 s
3D	1459	7233	0,592804 s

Tabla 7: Características del mallado de la Figura 24

Además de los valores anteriores, se debe añadir que el mallado se ha realizado mediante el método de Delaunay, y que se han creado durante el mallado tridimensional 4286 tetraedros (0,015600 s). La geometría representa una placa de dimensiones $1m \times 1m \times 0,05m$ con cinco palpadores puntuales adosados a la superficie superior.

Puesto que éste será nuestro mallador seleccionado, es interesante explicar las razones de su elección. La primera de ellas es el hecho de que pese a ser un software de código abierto, presenta las características propias de un software comercial desarrollado por una gran empresa. Su largo recorrido en versiones estables, y su uso

en infinidad de proyectos, le confieren la fiabilidad necesaria para nuestro simulador. Además, es uno de los malladores compatibles con *Elmer*, lo cual nos transmite aún mayor seguridad y nos da ciertas facilidades a la hora de realizar cualquier operación entre ellos. Otra ventaja de *Gmsh* es que permite elegir el algoritmo a emplear durante el mallado según las necesidades del problema. Presenta tres opciones en el caso bidimensional, y dos para el tridimensional. Se muestra un resumen de ellas:

1. Para todos los algoritmos 2D, previamente se genera un mallado de Delaunay que contenga todos los elementos del mallado 1D usando el algoritmo *divide & conquer* (consiste básicamente en ir dividiendo el problema en dos o más subproblemas del mismo tipo hasta conseguir uno muy simple fácilmente resoluble).
2. Mallado 2D
 - a) ***MeshAdapt***. Este algoritmo se basa en modificaciones de malla locales. Hace uso del suavizado de bordes (crea mejores geometrías), particiones (grandes bordes) y colapsos (pequeños bordes).
 - b) ***Delaunay***. Por definición, se insertan nuevos puntos de forma secuencial en el circuncentro del elemento que tiene mayor circunradio adimensional (véase [26]). Posteriormente se vuelve a conectar la malla a través de un criterio de Delaunay.
 - c) ***Frontal***. La generación de malla se realiza desde el contorno hacia el interior del dominio. Se precisan como datos de entrada los nodos y las aristas del mallado 1D, además de un tamaño de elemento prescrito.
3. Mallado 3D
 - a) ***Delaunay***. Se divide en dos partes: la primera une todos los volúmenes, mientras que la segunda es similar al caso explicado para dos dimensiones.
 - b) ***Frontal***. Es el mismo algoritmo descrito en el caso bidimensional, con las modificaciones propias del caso 3D.

Para entender aún mejor cada método se puede realizar una clasificación valorando las características principales que se buscan en una buena malla:

MÉTODO	ROBUSTEZ	RENDIMIENTO	CALIDAD ELEMENTOS
<i>MeshAdapt</i>	1	3	2
<i>Delaunay</i>	2	1	2
<i>Frontal</i>	3	2	1

Tabla 8: Valoración de métodos de mallado [65]

El algoritmo de Delaunay presenta una gran robustez y es el más rápido, además de ser el único que soporta el campo de longitudes para definir el tamaño de los elementos (elementos de gran calidad). Sin embargo, en determinados momentos puede

llegar a modificar la malla si las superficies no son muy regulares, hecho que se evitará en nuestro problema ya que todas nuestras superficies serán planas (exterior de la placa) o esféricas (frontera del defecto). Por todo ello será escogido como nuestro método de mallado.

En el supuesto de que no se especificara el método de mallado que se pretende utilizar, *Gmsh* aplica de forma automática el algoritmo que estima más oportuno según la geometría a mallar. El criterio que emplea es aplicar *Delaunay* para superficies planas, y *MeshAdapt* para el resto.

5.3. Elmer

Elmer, véanse [41, 60, 67, 68, 69, 62], es un software de simulación multifísica de código abierto desarrollado principalmente por el Centro de Información Tecnológica para la Ciencia (*IT Center for Science*, CSC), Finlandia. El desarrollo de *Elmer* comenzó en el año 1995, en colaboración con universidades finlandesas, institutos de investigación y la industria. Después de su publicación como código abierto en el año 2005, tanto el uso como el desarrollo se han internacionalizado.

Elmer incluye modelos físicos de dinámica de fluidos, mecánica estructural, electromagnetismo, transferencia de calor y acústica, entre otros. Éstos son descritos por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, resueltas mediante el método de los elementos finitos.

En nuestro proyecto se empleará el módulo *Linear Elasticity Solver*, que computa el campo de desplazamientos a partir de las ecuaciones de Navier. Como ya ha sido mencionado anteriormente, estas ecuaciones se corresponden con la teoría lineal de deformación elástica en sólidos. *Elmer* permite que el material introducido sea anisótropo. Además, en el caso de que sea requerido por el usuario, los tensores de esfuerzos pueden ser también extraídos. Éste será nuestro caso, puesto que precisaremos de ellos para calcular la derivada topológica. Por otro lado, aunque no nos compete, se podría hacer simultáneamente un estudio térmico.

Las ecuaciones que rigen este solver son las que se formularon en el apartado 2.3, y el análisis que se realizará será de tipo armónico. El software permite imponer las condiciones iniciales y de contorno que se deseen; desde las comunes condiciones de Dirichlet y Neumann, hasta condiciones más complejas: condiciones periódicas.

Elmer presenta otras características importantes que resultarán muy útiles para este proyecto. Entre ellas, se encuentra la posibilidad de extraer las frecuencias y modos propios de la placa, que tal y como se vió en el apartado 4.5 será necesario para la correcta implementación de la derivada topológica.

En lo referente al uso de *Elmer*, enumeraremos en primer lugar las diferentes partes que lo componen (véase la Figura 20 para observar el flujo de datos a través

de *Elmer*):

- **ElmerGrid.** Es la parte del software que se encarga de crear los archivos de mallado para que sean compatibles con *Elmer*. Puede bien adecuar los mallados (si provienen de otro mallador, como es nuestro caso, *Gmsh*) o bien mallar por sí mismo una estructura. Tan sólo se puede ejecutar desde la consola.
- **ElmerGUI.** Es el interfaz gráfico de usuario que presenta este software. Permite realizar muchas de las operaciones de forma manual, sin embargo, si se pretende buscar versatilidad y realizar operaciones más complejas se deberá actuar directamente sobre el archivo *.sif, que es el archivo de ejecución de *Elmer*.
- **ElmerSolver.** Es el solver propiamente dicho. Se puede ejecutar desde el GUI o desde la consola.
- **ElmerPost.** Es el visualizador propio de *Elmer*. Presenta las garantías de compatibilidad de archivos, sin embargo las operaciones que permite realizar son algo escasas. Por ello, los datos generados con *Elmer* se tratarán posteriormente con *Matlab*TM. También se podrá ejecutar desde el GUI y la consola.

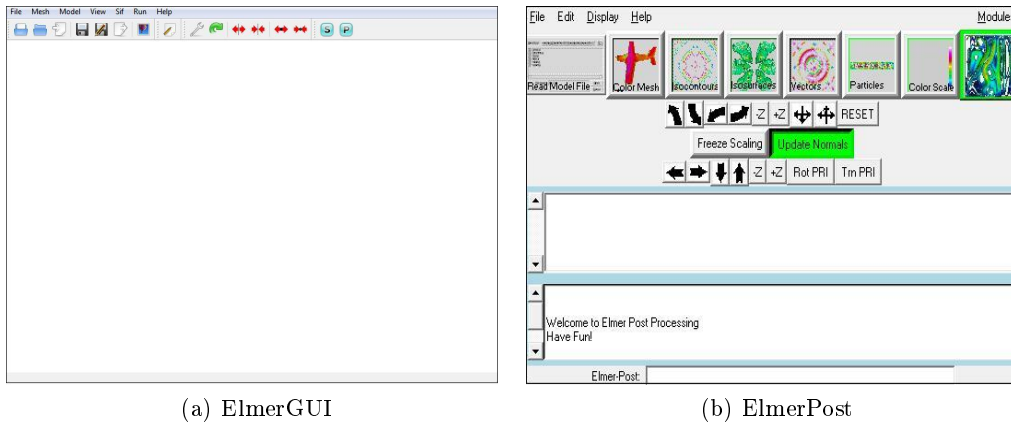


Figura 25: Elmer

Otra de las ventajas de este software es la existencia de una librería de evaluación numérica llamada MATC [53]. Esta librería confiere mayor capacidad al solver, puesto que es capaz de desarrollar expresiones matemáticas definidas en su archivo de comandos, o incluso en su post-visualizador.

Elmer también permitirá resolver distintos problemas donde sólo cambia la frecuencia o el término independiente de manera eficiente, ya que no se requiere volver a implementar las matrices de masa y rigidez. En la Figura 26 se puede observar un fichero tipo de entrada para *Elmer*.

<pre> Header CHECK KEYWORDS Warn Mesh DB "." "PlacaCuadradaCon2" Include Path "" Results Directory "" End Simulation Max Output Level = 4 Coordinate System = Cartesian Coordinate Mapping(3) = 1 2 3 Simulation Type = Steady state Steady State Max Iterations = 1 Output Intervals = 1 Timestepping Method = BDF BDF Order = 1 Solver Input File = case.sif Post File = case.ep End Constants Gravity(4) = 0 -1 0 9.82 Stefan Boltzmann = 5.67e-08 Permittivity of Vacuum = 8.8542e-12 Boltzmann Constant = 1.3807e-23 Unit Charge = 1.602e-19 End </pre>	<pre> Body 1 Target Bodies(1) = 1 Name = "Body 1" Equation = 1 Material = 1 End Solver 1 Equation = Linear elasticity Procedure = "StressSolve" "StressSolver" Variable = -dofs 3 Displacement Harmonic Analysis = True Frequency = 10000 Exec Solver = Always Stabilize = True Optimize Bandwidth = True Steady State Convergence Tolerance = 1.0e-5 Nonlinear System Convergence Tolerance = 1.0e-8 Nonlinear System Max Iterations = 20 Nonlinear System Newton After Iterations = 3 Nonlinear System Newton After Tolerance = 1.0e-3 Linear System Solver = Iterative Linear System Iterative Method = CG Linear System Max Iterations = 10000 Linear System Convergence Tolerance = 1.0e-8 Linear System Preconditioning = ILU2 End </pre>	<pre> Equation 1 Name = "Equation 1" Calculate Stresses = False Active Solvers(2) = 1 2 End Material 1 Name = "Aluminium (generic)" Heat expansion Coefficient = 23.1e-6 Heat Conductivity = 237.0 Sound speed = 5000.0 Heat Capacity = 897.0 Mesh Poisson ratio = 0.35 Density = 2700.0 Poisson ratio = 0.35 Youngs modulus = 70.0e9 End Boundary Condition 1 Target Nodes(1) = 16 Name = "BoundaryCondition 1" Displacement 3 Load = Real 1 End </pre>
(a) Parte I	(b) Parte II	(c) Parte III

Figura 26: Fichero de entrada de Elmer

5.4. ParaView

ParaView es un software de código abierto, que permite la visualización y análisis de datos en múltiples plataformas (véase [72]). En *ParaView* se pueden construir fácilmente las visualizaciones para analizar sus datos utilizando técnicas cualitativas y cuantitativas. La exploración de los datos se puede realizar de forma interactiva en 3D o mediante programación utilizando las capacidades de procesamiento de *ParaView*.

ParaView fue desarrollado para analizar conjuntos de datos extremadamente grandes, utilizando recursos de computación de memoria distribuida. Se puede ejecutar tanto en supercomputadoras para analizar conjuntos de datos de gran tamaño, como en computadoras portátiles para conjuntos más pequeños. Ha tenido una expansión fulgurante en laboratorios, universidades, e incluso en empresas. Su eficiencia se puede observar en los premios recibidos en el ámbito de la computación de alto rendimiento.

En nuestro proyecto, el número de datos dependerá de las variables que se quieran estudiar (campo de desplazamientos y campo de esfuerzos) y del número de elementos que conformen la malla. Este software permite representar de forma gráfica estos valores vectoriales, al igual que permite asociar los valores escalares de la derivada topológica a sus nodos correspondientes para poder visualizarlo correctamente. *Elmer* puede extraer un tipo de archivo con las extensiones *.vtk y *.vtu, ambas compatibles con *ParaView*. Sin embargo, para calcular la derivada topológica utilizaremos *MatlabTM*, y visualizaremos finalmente los resultados en *ParaView*. Para ello tendremos que crear un archivo de entrada compatible con *ParaView*, mediante *Python*, que contenga los resultados de la herramienta matemática perfectamente asociados a sus respectivos nodos. De esta manera se consiguen visualizar los valores

de la derivada topológica sobre la placa.

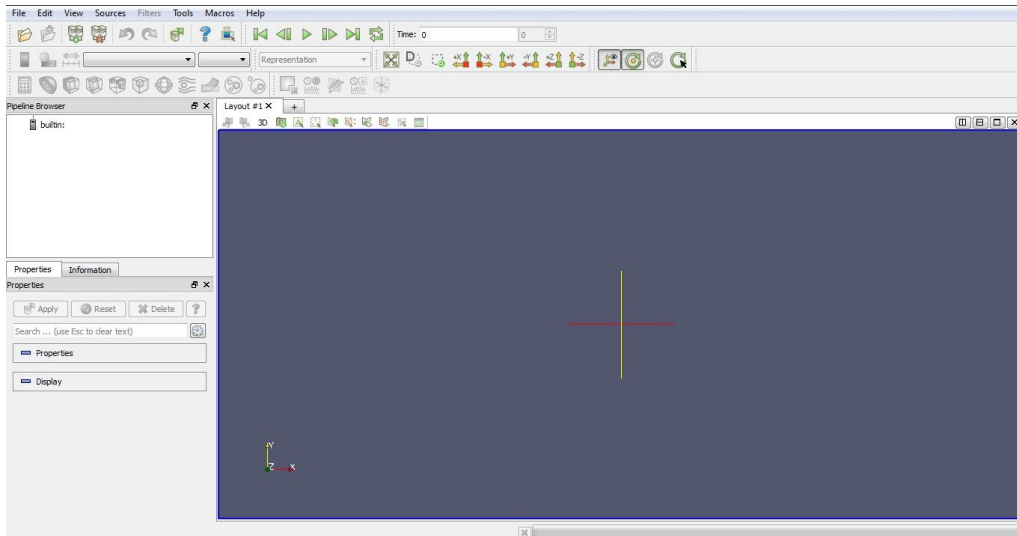


Figura 27: ParaView

5.5. Python

Python es un lenguaje de programación interpretado cuya filosofía hace hincapié en una sintaxis que favorezca un código legible. Se trata de un lenguaje de programación multiparadigma, es decir, es capaz de crear programas usando más de un estilo de programación. Posee licencia de código abierto. Para una descripción más detallada de este software puede consultarse [66].

El uso de *Python* en este proyecto alcanza su sentido debido al número de software utilizados y a la necesidad de interrelacionar todos ellos (véase la Figura 20). Tanto la geometría, como el mallado mediante *Gmsh* se hacen de forma manual, sin necesidad de utilizar *Python*, ya que no son labores repetitivas. Es decir, se generan tanto la geometría como el mallado, y se dejan almacenados en carpetas que posteriormente son utilizadas por *Elmer* para resolver el problema de Navier-Cauchy. Estas geometrías tan sólo cambian en el caso de modificar la posición de los defectos o de los palpadores. Junto con el uso de *Elmer*, se inicia también el uso de *Python*. Para exponer de forma clara y concisa cual es el funcionamiento del script creado, se resumen a continuación cada uno de los pasos:

1. Generar los archivos *.sif necesarios para ejecutar *Elmer* y resolver el problema armónico con las condiciones de contorno deseadas.
2. Lectura de los archivos de salida *.ep y tratamiento de dichos datos para enlazarlos con *Matlab*TM.
3. Ejecución de archivos *.m de *Matlab*TM.

4. Creación de archivos de entrada *.vtk de *ParaView* para visualizar la derivada topológica.

La implementación de todas las órdenes a través de un lenguaje de programación como *Python* permite que no se tengan que realizar de forma manual operaciones repetitivas (esto se resuelve en *Python* mediante el simple uso de bucles). Es decir, en el caso de que tan sólo se tuviera que realizar una vez cada operación para resolver la derivada topológica, no resultaría necesario el uso de este software. En los resultados numéricos que mostraremos en el capítulo 6 se irán alternando los palpadores que actúan como emisores, y por tanto para cada una de esas modificaciones se deberán realizar los mismos pasos. Además, el hecho de que se resuelva el problema mediante técnicas multifrecuencia, implica que para cada una de esas frecuencias se deba repetir el mismo bloque de acciones.

5.6. *Matlab*TM

*Matlab*TM es un lenguaje de alto nivel que contiene un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación. Fue programado por *Cleve Moler* a finales de los años setenta, con la intención de proporcionar una forma sencilla de acceder a librerías *LINPACK* y *EISPACK* donde están implementados, de forma altamente eficiente, los algoritmos clave del análisis matricial (por ejemplo, el método de Gauss, métodos iterativos, ...). De hecho *Matlab*TM es una abreviatura de “Matrix Laboratory”. Puesto que su uso se encuentra fuertemente extendido, no se va a exponer aquí su funcionamiento. Para más detalle véanse [20, 43].

Su empleo en este proyecto se ha relegado a labores de cálculo numérico. Se ha utilizado para resolver el método de superposición de modos, apartado 4.4, y para realizar los cálculos pertinentes a la derivada topológica, apartado 2.5, ya que precisa de trabajar con tensores y éstos resultan muy versátiles en *Matlab*TM. También se ha utilizado para la visualización de algunos resultados mostrados a lo largo de este proyecto.

6. Resultados

En este capítulo mostraremos una serie de ensayos numéricos para ilustrar tanto el correcto funcionamiento del código numérico generado para la resolución de los problemas directos y adjuntos, como la potencia de la derivada topológica para detectar defectos inmersos en una placa.

6.1. Comprobación del correcto funcionamiento y comunicación entre los distintos software utilizados

El desarrollo de este proyecto se basa en una correcta interconexión entre los software empleados. El uso de todos y cada uno de ellos, debe realizarse de una manera ordenada, y por supuesto, con gran exactitud.

Para comprobar el correcto funcionamiento del simulador se testaron varios casos con solución exacta conocida. Tal es el ejemplo que se muestra a continuación, en el cual se valida la solución numérica de *Elmer*.

Se considera el problema

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) + \rho \omega^2 \vec{u} + \vec{f} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \vec{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (76)$$

siendo $\Omega = [0, 1] \times [0, 2] \times [-1, 0]$ y $\rho = \mu = \omega = \lambda = 1$. El forzamiento, \vec{f} , en este caso será

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = -2y - z \\ f_2(x, y, z) = 2x + z \\ f_3(x, y, z) = x - y \end{cases} . \quad (77)$$

La solución analítica del problema es

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = 2y + z \\ u_2(x, y, z) = -2x - z \\ u_3(x, y, z) = -x + y \end{cases} . \quad (78)$$

Para comparar la solución numérica extraída de *Elmer* con la solución exacta (dada por las expresiones (78)), se muestran en la Figura 28 las dos primeras componentes del campo de desplazamientos \vec{u} . En este caso se han representado ambos resultados mediante *Matlab*TM, posibilitando una mejor comparación entre soluciones. Los resultados numéricos de *Elmer* se han interpolado para conseguir representar las imágenes de la Figura 28. En ella, se presentan las componentes u_1 y u_2 en los planos $x = 0,5$ e $y = 1$, respectivamente. Los resultados para u_3 resultan análogos a los mostrados para las otras dos componentes.

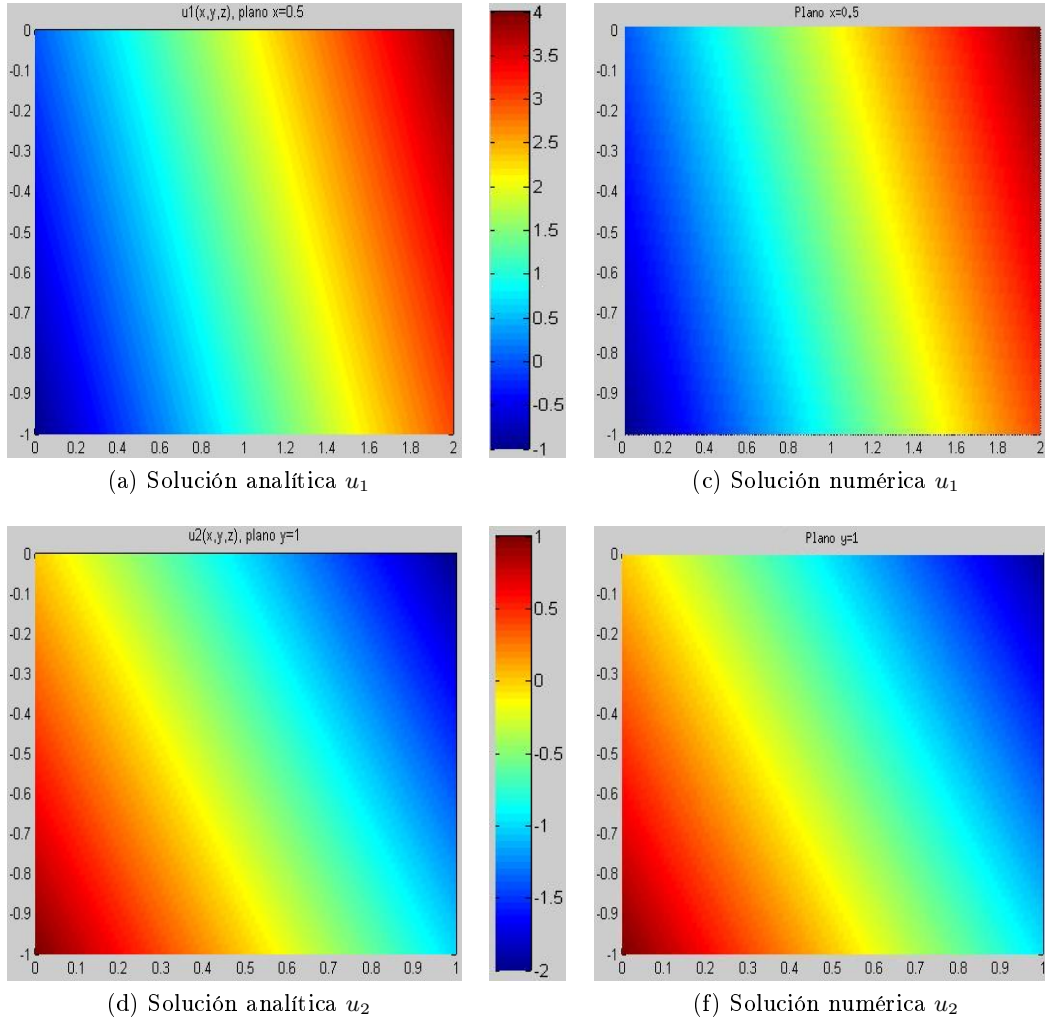


Figura 28: Solución numérica vs Solución analítica

Para la resolución de este problema se ha empleado una malla tridimensional no estructurada, compuesta por 14185 nodos y 80696 elementos (incluidos los elementos de contorno).

6.2. Simulación de datos experimentales

En este apartado se expondrá un esquema claro de cómo se han llevado a cabo los ensayos. Para ello, en primer lugar, se crea una geometría (con y sin defectos), y se colocan una serie de palpadores puntuales sobre ella (véase la Figura 29). El posicionamiento de estos palpadores es libre, y nosotros optaremos por colocarlos en forma de cuadrícula de 5×5 palpadores. En nuestro caso emitiremos desde uno de ellos (marcado con el color rojo en la Figura 29) y recibiremos en el resto (color azul). El dominio mostrado en la Figura 29 es $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0,1] \text{ m}^3$, y el defecto introducido, D , consiste en una esfera de $radio = 0,022 \text{ m}$ y $centro =$

(0,37,0,54,0,039216).

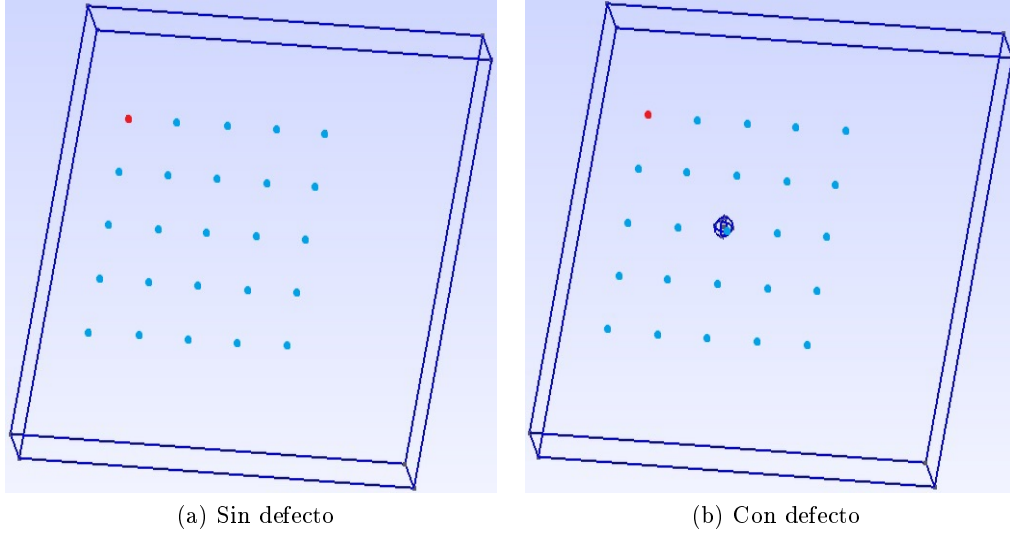


Figura 29: Geometría de nuestra placa con palpadores puntuales

Una vez creada la geometría, y distribuidos los palpadores de la manera deseada, se pasa a realizar el mallado. Éste se realiza a través de *Gmsh*, tal y como se mencionó en el apartado 5.2. Un buen calibrado de esta malla resulta imprescindible para conseguir un resultado numérico correcto. Por ello, a continuación (véanse las tablas 10, 11, 12 y 13), se exponen para las dos frecuencias empleadas en nuestros ensayos, los valores y errores relativos que se obtienen conforme se remalla la geometría (se muestran los últimos remallados de la placa sin defecto). De esta manera, se consigue que los valores obtenidos presenten un error máximo acotado previamente por nosotros. La elección de las frecuencias de excitación se realiza en función de un archivo de salida de *Elmer* (similar al de la Figura 19a), evitando de esta manera incurrir en el error de excitar un modo propio. Las frecuencias escogidas se encuentran en la zona media, o de valle, entre dos frecuencias propias. Éstas serán 1000 Hz y 2000 Hz. En la tabla 9 se pueden apreciar las frecuencias correspondientes a los primeros modos propios de la placa.

PLACA SIN DEFECTO			PLACA CON DEFECTO		
525,87481894	1402,19256283	1823,76190364	523,36351821	1404,47453839	1824,46252877
687,64329607	1466,82186290	1897,91058162	689,46473863	1467,00373528	1900,83725328
788,28627185	1483,02738512	1942,71254128	791,73647252	1483,84623846	1941,89736525
934,82631259	1587,39861501	2071,21680273	935,09374732	1591,44179435	2075,62329573
1051,96825162	1638,18036727	2124,04581839	1052,98784736	1636,74632572	2129,37643652
1113,72517204	1655,01873589	2224,71306835	1112,73937563	1654,93746538	2226,18472853
1274,29519278	1700,87016524	2302,97260416	1272,87346468	1700,84337437	2302,74521654
1351,28539961	1784,62701610	2371,41062585	1350,84649329	1785,00273455	2374,71642794

Tabla 9: Frecuencias propias de Ω y $\Omega \setminus D$ (Hz)

Los ensayos que se muestran en las tablas 10, 11, 12 y 13, se han realizado emitiendo desde el mismo palpador (indicado en rojo en la Figura 30) y comprobando las soluciones en el resto. Sin embargo, en las tablas tan sólo se mostrarán los resultados de tres receptores (indicados en azul en la Figura 30), que servirán perfectamente como muestra de lo que ocurre en el resto. El forzamiento empleado para dichas excitaciones ha sido $\vec{f} = 10^{10} (0, 0, -\delta_{\vec{x}_i})$ (el factor 10^{10} simplemente reescala los valores de los desplazamientos en comparación con los que se obtendrían al considerar el factor 1). Los valores característicos del material empleado son los de un tipo de aluminio genérico: $E = 70 \cdot 10^9 \text{ GPa}$, $\nu = 0,35$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ y $c = 5000 \text{ m/s}$. Las tablas irán emparejadas de dos en dos, según la frecuencia de emisión.

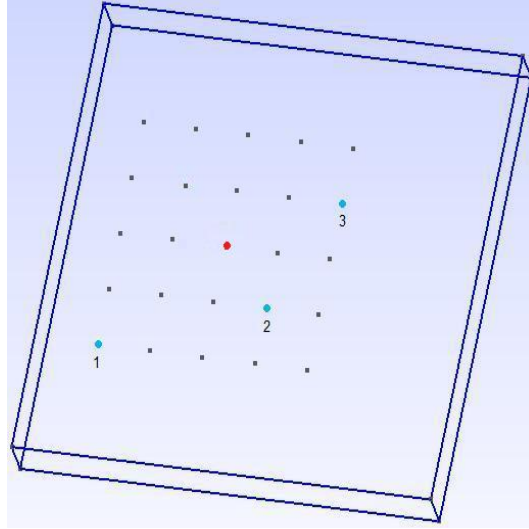


Figura 30: Esquema para la calibración de mallas

	NODOS	RECEPTOR 1	RECEPTOR 2	RECEPTOR 3
<i>Malla 1</i>	161356	9,704871751E-01	1,503057153	2,405086799
<i>Malla 2</i>	222566	9,423365843E-01	1,556526957	2,496275876
<i>Malla 3</i>	283204	9,395708321E-01	1,559115483	2,543163494
<i>Malla 4</i>	352474	9,354520044E-01	1,571517859	2,574386909

Tabla 10: Convergencia del campo de desplazamientos (2000 Hz - Placa sin defecto)

	RECEPTOR 1	RECEPTOR 2	RECEPTOR 3
<i>Malla 1</i>	0,037453246	0,043563429	0,065763276
<i>Malla 2</i>	0,007981492	0,018373796	0,030429377
<i>Malla 3</i>	0,006557652	0,010110797	0,012472929

Tabla 11: Errores relativos dependientes de la malla (2000 Hz - Placa sin defecto)

	NODOS	RECEPTOR 1	RECEPTOR 2	RECEPTOR 3
<i>Malla 1</i>	161356	1,706070780	2,683087978	3,504756729
<i>Malla 2</i>	222566	1,754373091	2,767487388	3,613318452
<i>Malla 3</i>	283204	1,761872957	2,776707651	3,696622948
<i>Malla 4</i>	352474	1,766730735	2,801739974	3,724873752

Tabla 12: Convergencia del campo de desplazamientos (1000 Hz - Placa sin defecto)

	RECEPTOR 1	RECEPTOR 2	RECEPTOR 3
<i>Malla 1</i>	0,034334579	0,042349396	0,059093821
<i>Malla 2</i>	0,006994637	0,012225469	0,029948747
<i>Malla 3</i>	0,002749586	0,008934563	0,007584365

Tabla 13: Errores relativos dependientes de la malla (1000 Hz - Placa sin defecto)

Los valores para los desplazamientos en las tablas 10 y 12 se han obtenido mediante la norma $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2(\vec{x}_i) + u_2^2(\vec{x}_i) + u_3^2(\vec{x}_i)}$, mientras que los errores relativos de las tablas 11 y 13 se calcularon comparando los resultados obtenidos para las mallas 1, 2 y 3, con los de la malla 4, que se consideran como “exactos” al ser los más precisos. Es decir, en las tablas 11 y 13 se muestran los errores $\frac{\|\vec{u}_4(\vec{x}_i) - \vec{u}_j(\vec{x}_i)\|}{\|\vec{u}_4(\vec{x}_i)\|}$, donde $j = 1, 2, 3$. Mediante estos remallados se ha conseguido un error medio inferior al 1 %, el cual nos permite percibir las pequeñas diferencias existentes entre las mediciones de las placas con y sin defecto, y así poder implementar correctamente la derivada topológica.

Ahora se realizará el mismo proceso para la placa con defectos:

	NODOS	RECEPTOR 1	RECEPTOR 2	RECEPTOR 3
<i>Malla 1</i>	135423	9,695009217E-01	1,481448768	2,426301351
<i>Malla 2</i>	182345	9,490345916E-01	1,528690183	2,487935104
<i>Malla 3</i>	240245	9,467713238E-01	1,533777567	2,503791171
<i>Malla 4</i>	304863	9,436121354E-01	1,542329996	2,548198114

Tabla 14: Convergencia del campo de desplazamientos (2000 Hz - Placa con defecto)

	RECEPTOR 1	RECEPTOR 2	RECEPTOR 3
<i>Malla 1</i>	0,027435835	0,039473542	0,047836455
<i>Malla 2</i>	0,005746489	0,008843641	0,023649264
<i>Malla 3</i>	0,003347973	0,005545136	0,017426802

Tabla 15: Errores relativos dependientes de la malla (2000 Hz - Placa con defecto)

	DE NODOS	RECEPTOR 1	RECEPTOR 2	RECEPTOR 3
<i>Malla 1</i>	135423	1,660350552	2,563156332	3,353343012
<i>Malla 2</i>	182345	1,690663443	2,640705415	3,458524831
<i>Malla 3</i>	240245	1,695011571	2,651223997	3,481334271
<i>Malla 4</i>	304863	1,698679419	2,661294362	3,510645103

Tabla 16: Convergencia del campo de desplazamientos (1000 Hz - Placa con defecto)

	RECEPTOR 1	RECEPTOR 2	RECEPTOR 3
<i>Malla 1</i>	0,022563921	0,036875902	0,044807176
<i>Malla 2</i>	0,004718945	0,007736447	0,014846352
<i>Malla 3</i>	0,002159237	0,003784013	0,008349129

Tabla 17: Errores relativos dependientes de la malla (1000 Hz - Placa con defecto)

6.3. Resolución de problemas con y sin defectos

Tal y como se ha explicado en el capítulo 3, la esencia de la derivada topológica reside en la diferencia entre las mediciones sobre la placa con defectos y sin defectos. Por ello, en este apartado se va a evaluar el efecto de tener o no tener defectos en nuestra placa.

Hemos realizado una serie de cortes en nuestro dominio, definiendo varios planos tangentes a D , que en nuestro caso es una esfera. Se busca esta proximidad con el defecto puesto que éstas son las zonas en las que se produce una mayor variación de los valores de \vec{u} para la placa con defectos y sin defectos. De hecho, se mostrará la diferencia entre dichas medidas, ya que resulta imposible discernir entre ambas si se

exponen a la vista mediante una imagen.

Todos los ensayos aquí mostrados se realizan para la misma geometría que en el apartado anterior y para una frecuencia de 2000 Hz. El resto de características del ensayo son: $\vec{f} = (0, 0, -\delta_{\vec{x}_i})$, $E = 70 \cdot 10^9 \text{ GPa}$, $\nu = 0,35$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $c = 5000 \text{ m/s}$ (valores correspondientes a un aluminio genérico). El palpador que actuará como emisor en este caso será el mostrado en la Figura 31 mediante un punto rojo.

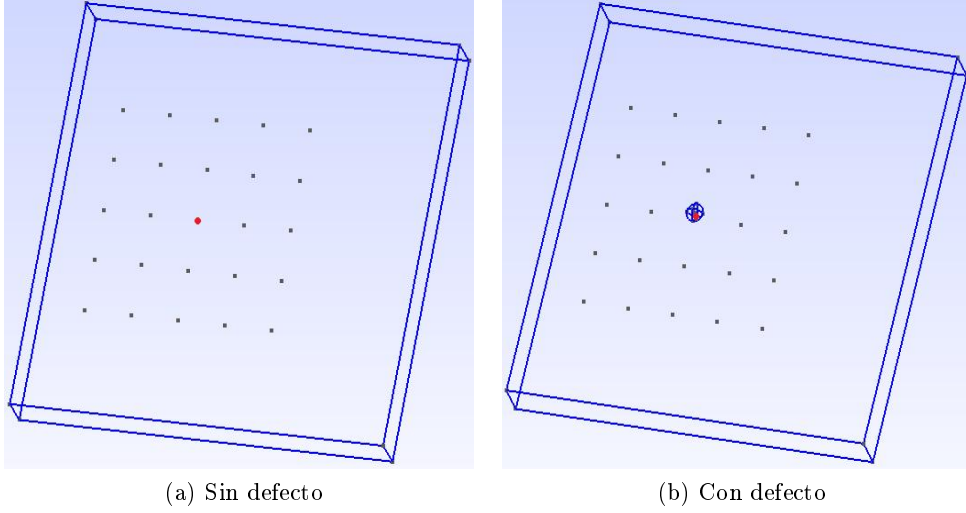
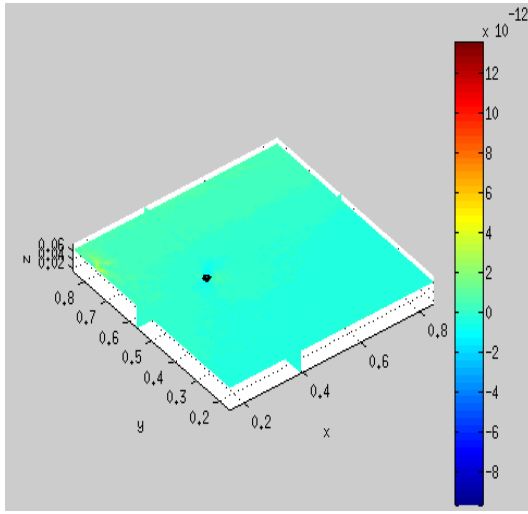
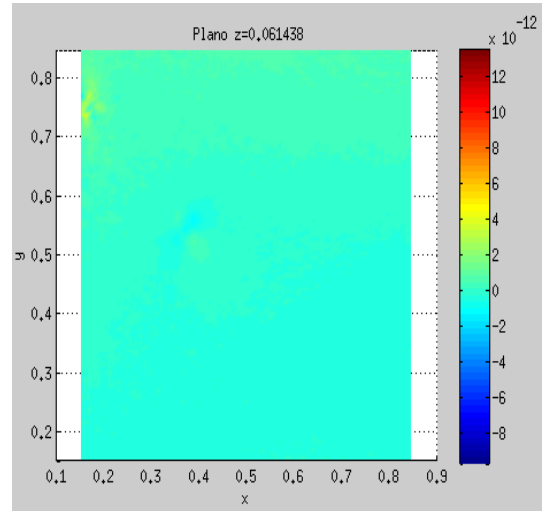


Figura 31: Esquema de excitación para evaluar zonas de la placa

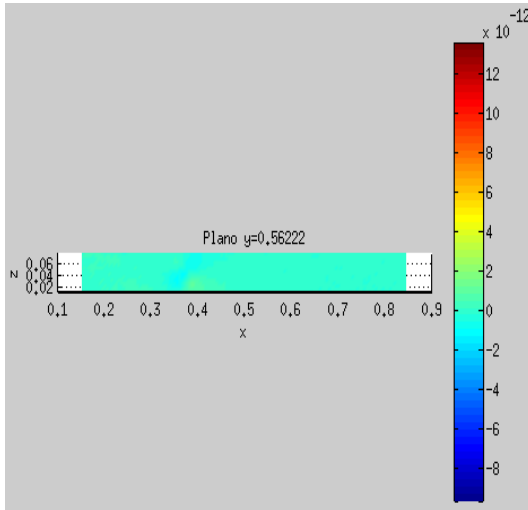
Las Figuras 32, 33 y 34 muestran $\vec{u} = \vec{u}_{sin\ defecto} - \vec{u}_{con\ defecto}$. Para realizar una representación ordenada, se opta por mostrar las tres componentes del campo de desplazamientos por separado. Por tanto, cada componente se representará sobre tres planos y en una visión tridimensional.



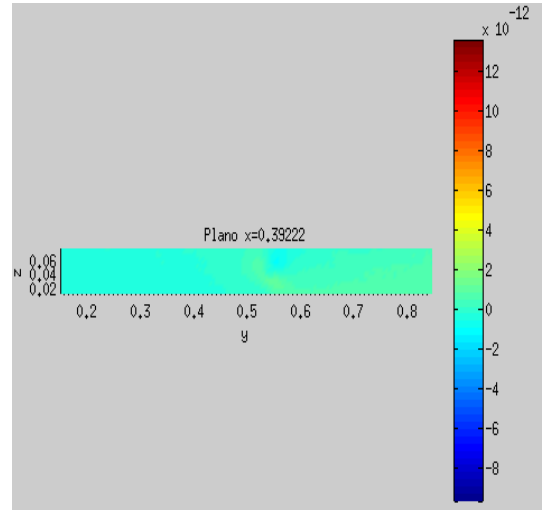
(a) Visión 3D



(b) Plano z

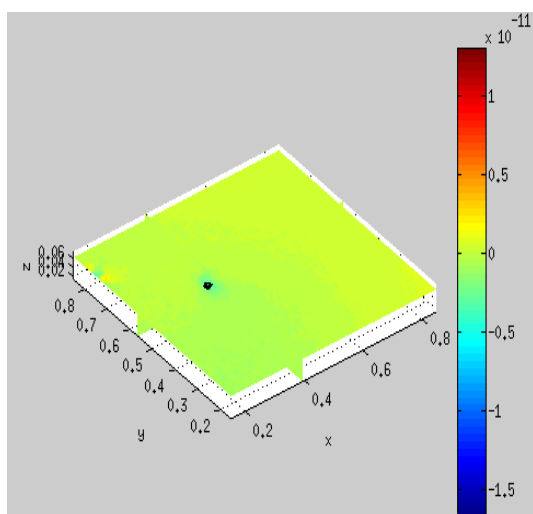


(c) Plano y

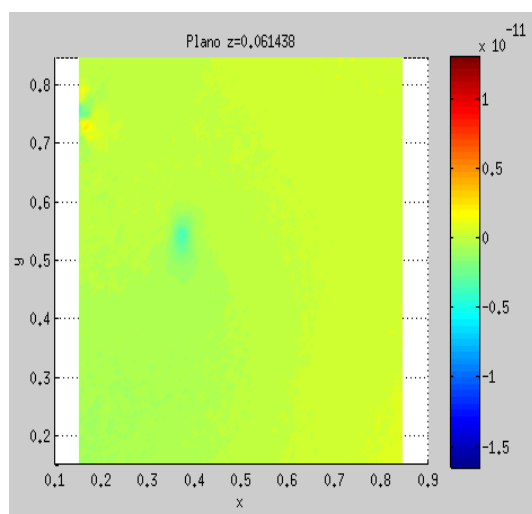


(d) Plano x

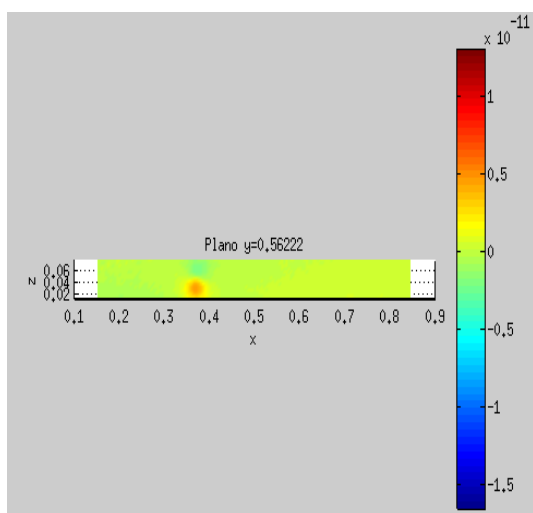
Figura 32: $u_1 = u_1 \text{ sin defecto} - u_1 \text{ con defecto}$



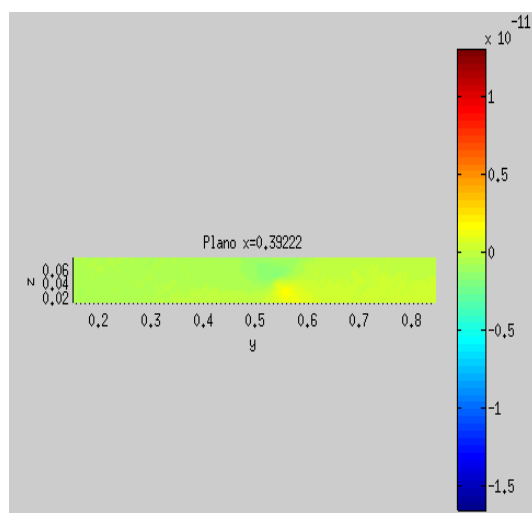
(a) Visión 3D



(b) Plano z



(c) Plano y



(d) Plano x

Figura 33: $u_2 = u_2 \text{ sin defecto} - u_2 \text{ con defecto}$

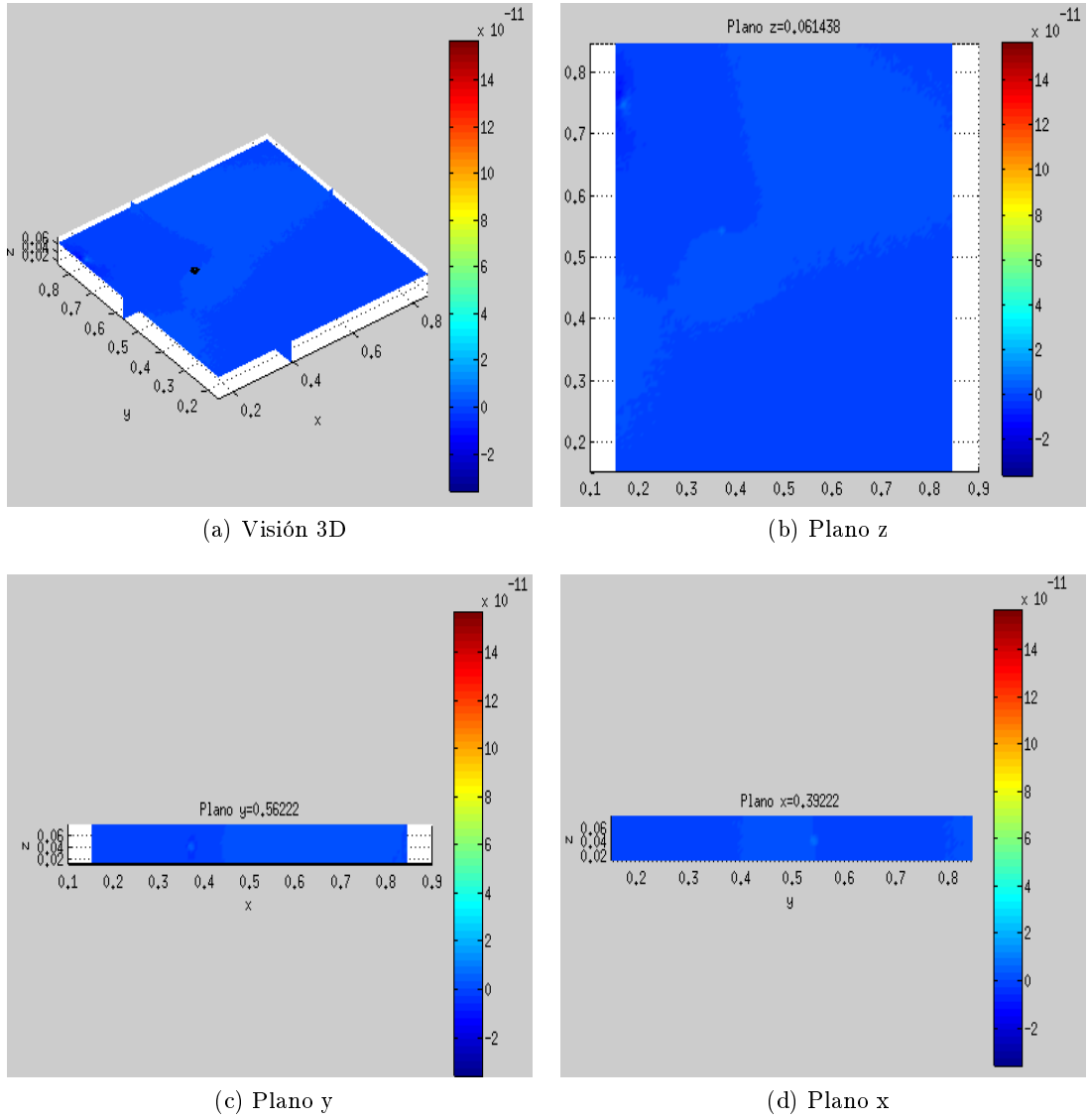


Figura 34: $u_3 = u_3 \text{ sin defecto} - u_3 \text{ con defecto}$

Tal y como se puede apreciar en las Figuras 32, 33 y 34, en este caso no todas las componentes aportan la misma información. Para u_1 apenas se percibe diferencia entre ambas medidas, mientras que en u_2 y u_3 se muestran variaciones mayores. En el plano z de la componente u_2 , y en el plano y de la componente u_3 , se puede intuir una diferencia en la zona próxima al defecto. De hecho, la superposición de todas estas componentes, junto con muchas más mediciones (diferente posicionamiento de transductores, diferentes frecuencias, ...), será lo que posteriormente nos permita mediante esa adición de información, que seamos capaces de localizar el defecto a través de la derivada topológica.

6.4. Detección de defectos utilizando la derivada topológica

En este apartado mostraremos el resultado de implementar la derivada topológica sobre nuestro problema. Las características de este ensayo son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{Dominio} & \left\{ \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0,1] \text{ m}^3 \right. \\ \textit{Defecto} & \left\{ D = \textit{esfera} \left\{ \begin{array}{ll} \textit{centro} & (0,37, 0,54, 0,039216) \\ \textit{radio} & 0,022 \text{ m} \end{array} \right. \right. \\ \textit{Forzamiento} & \left\{ \vec{f} = 10^{10} (0, 0, -\delta_{\vec{x}_i}) \right. \\ \textit{Material} & \left\{ \begin{array}{ll} E = 70 \cdot 10^9 & \text{GPa} \\ \nu = 0,35 & \\ \rho = 2700 & \text{kg/m}^3 \\ c = 5000 & \text{m/s} \end{array} \right. \\ \textit{Frecuencias} & \left\{ \begin{array}{ll} 1000 & \text{Hz} \\ 2000 & \text{Hz} \end{array} \right. \\ \textit{Mallado} & \left\{ \begin{array}{ll} \textit{Placa sin defecto} & 352474 \text{ nodos} \\ \textit{Placa con defecto} & 304863 \text{ nodos} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (79)$$

En primer lugar se realizará un ensayo unifrecuencia para 2000 Hz, del cual se mostrarán las derivadas topológicas emitiendo desde distintos emisores. Un segundo paso, será sumar las contribuciones de todas las medidas realizadas para dicha frecuencia, para posteriormente, poder adicionar dicha información a la de otra frecuencia.

6.4.1. Derivada topológica para una frecuencia de 2000 Hz

En la Figura 35, se muestran dos derivadas topológicas para excitaciones desde diferentes emisores (las imágenes donde se muestran las derivadas topológicas, se corresponden con el plano z que contiene el centro del defecto, que en nuestro caso es una esfera de $radio = 0,022 \text{ m}$ y $centro = (0,37, 0,54, 0,039216)$). En el caso de emitir desde el palpador situado en la esquina superior izquierda (Figura 35b) aparece una zona de mínimos clara, con forma circular, que señala la existencia de un único defecto. Pero la localización no es correcta, ya que su centro parece estar situado en la coordenada $x = 0,27$ (la correcta es $x = 0,37$) y en la coordenada $y = 0,6$ (la correcta es $y = 0,54$). La localización del defecto se obtiene de manera más precisa en la Figura 35d, aunque en este caso, la imagen pierde mucha nitidez. Lo mismo ocurre al emitir de manera individual desde cada palpador: la información obtenida

resulta insuficiente para una correcta detección. Ahí radica la necesidad de sumar dicha información.

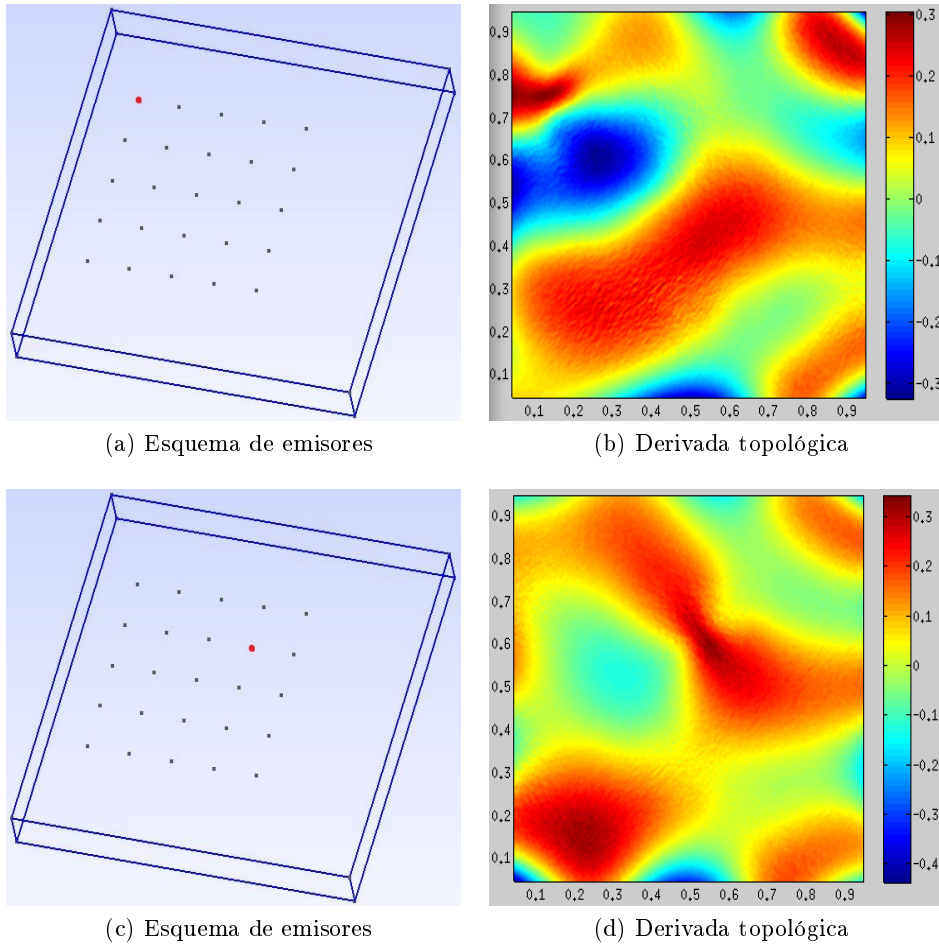
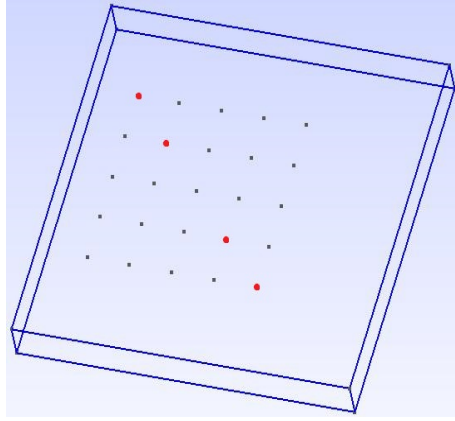
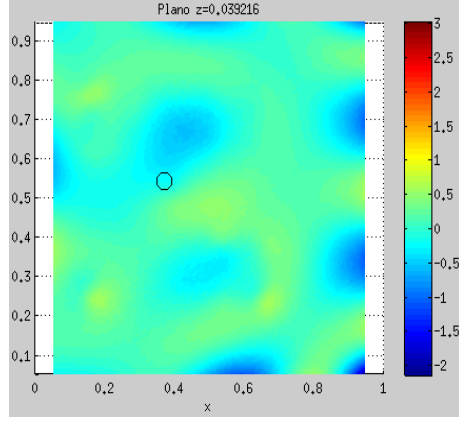


Figura 35: Derivada topológica en función de los emisores (2000 Hz)

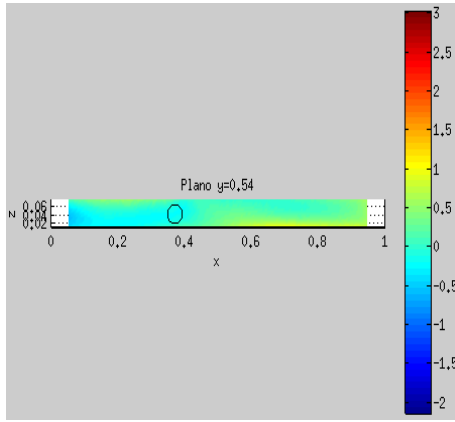
Ahora realizaremos la suma de cuatro derivadas topológicas individuales para mejorar levemente la precisión del método, ya que la cantidad de información aún sigue siendo muy baja. En la Figura 36 se muestra dicho resultado para los planos x , y , z , que intersectan en el centro del defecto. Las derivadas individuales obtenidas para cada emisor se han ponderado según se explicó en el capítulo 3, para dar el mismo peso a todas ellas en la contribución final.



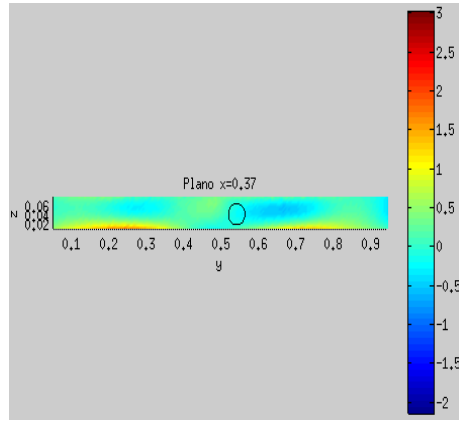
(a) Esquema de emisores



(b) Derivada topológica en el plano z



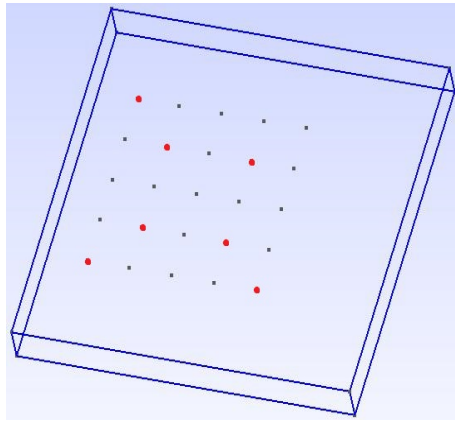
(c) Derivada topológica en el plano y



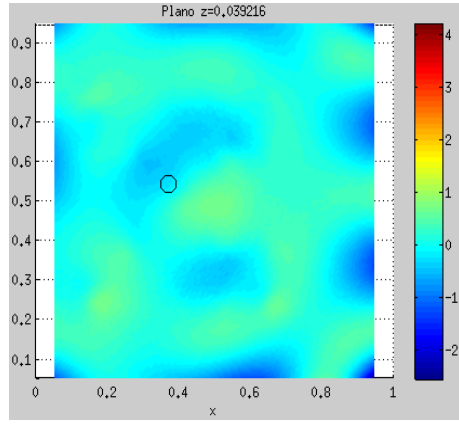
(d) Derivada topológica en el plano x

Figura 36: Suma de la derivada topológica para cuatro emisores individuales (2000 Hz)

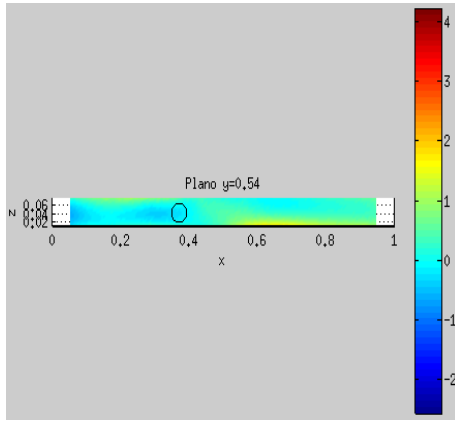
Por último, para finalizar este apartado, añadiremos la derivada topológica para siete emisores (véase la Figura 37), de manera que se puedan comparar los resultados obtenidos con los de la Figura 36.



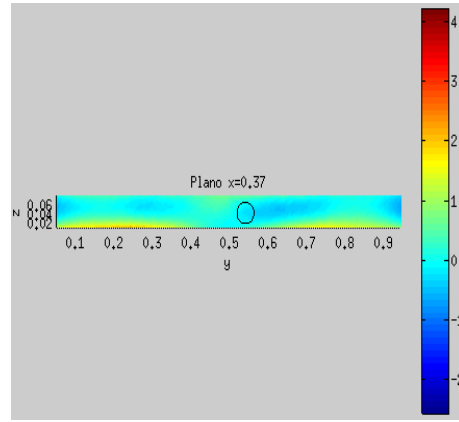
(a) Esquema de emisores



(b) Derivada topológica en el plano z



(c) Derivada topológica en el plano y



(d) Derivada topológica en el plano x

Figura 37: Suma de la derivada topológica para siete emisores individuales (2000 Hz)

Si se valoran las Figuras 36 y 37 de forma conjunta, se pueden extraer algunos detalles del funcionamiento de la derivada topológica. En la Figura 37, la zona de mayor probabilidad de encontrar el defecto, zona donde se concentran los valores negativos de mayor valor absoluto (color azul en las imágenes), se ha desplazado ligeramente hacia nuestro defecto. Sin embargo, ha aparecido otra posible zona de defectos. Es decir, aún no resulta claro el lugar donde se puede encontrar la esfera.

Al visualizar estas imágenes, se debe tener siempre en cuenta, que existen zonas espúreas próximas a los palpadores y a las superficies externas de la placa, en las cuales se acumularán valores negativos muy pronunciados de la derivada topológica. Esas zonas han de desecharse.

6.4.2. Derivada topológica para una frecuencia de 1000 Hz

Procediendo como en el apartado anterior 6.4.1, pero en este caso empleando una frecuencia de 1000 Hz, y tan sólo cuatro palpadores, obtenemos los siguientes

resultados:

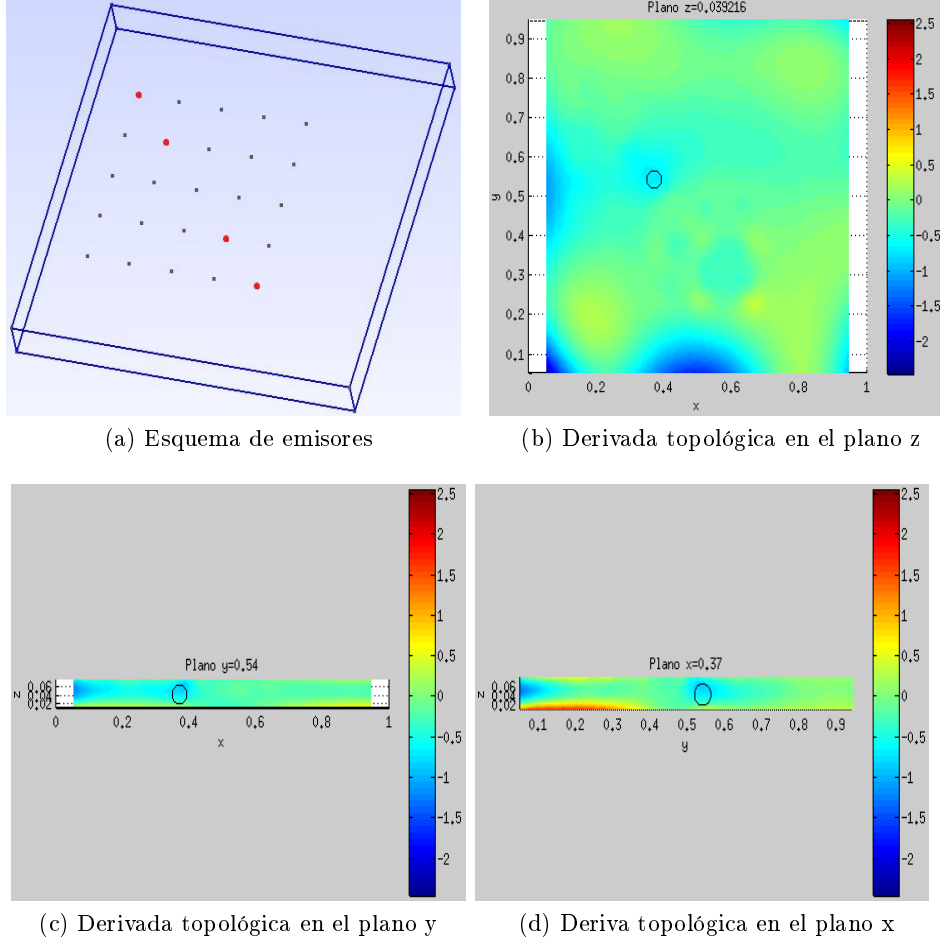


Figura 38: Suma de la derivada topológica para cuatro emisores individuales (1000 Hz)

Para esta frecuencia, y un número reducido de emisores, el resultado parece ser mejor que el de la Figura 36 correspondiente a 2000 Hz. De esta manera se puede aseverar que existen ciertas frecuencias más proclives a generar mejores resultados a la hora de detectar un defecto. Éste es uno de esos casos.

6.4.3. Multifrecuencia

Por último, se expondrán los resultados correspondientes a la adición de las derivadas topológicas para las dos frecuencias ensayadas: 1000 Hz y 2000 Hz. En este caso tendremos

$$\begin{cases} \text{Emisión a } 2000 \text{ Hz} & \{7 \text{ emisores} \times 24 \text{ receptores} = 168 \text{ datos} \\ \text{Emisión a } 1000 \text{ Hz} & \{4 \text{ emisores} \times 24 \text{ receptores} = 96 \text{ datos} \end{cases}, \quad (80)$$

lo cual hace un total de 264 datos para conseguir la información que se muestra en la Figura 39. Para ello se han mezclado siete medidas de una frecuencia (2000 Hz) y cuatro de otra (1000 Hz), demostrando así que esto no supone ningún problema, puesto que todas ellas se encuentran normalizadas y su información resulta perfectamente compatible.

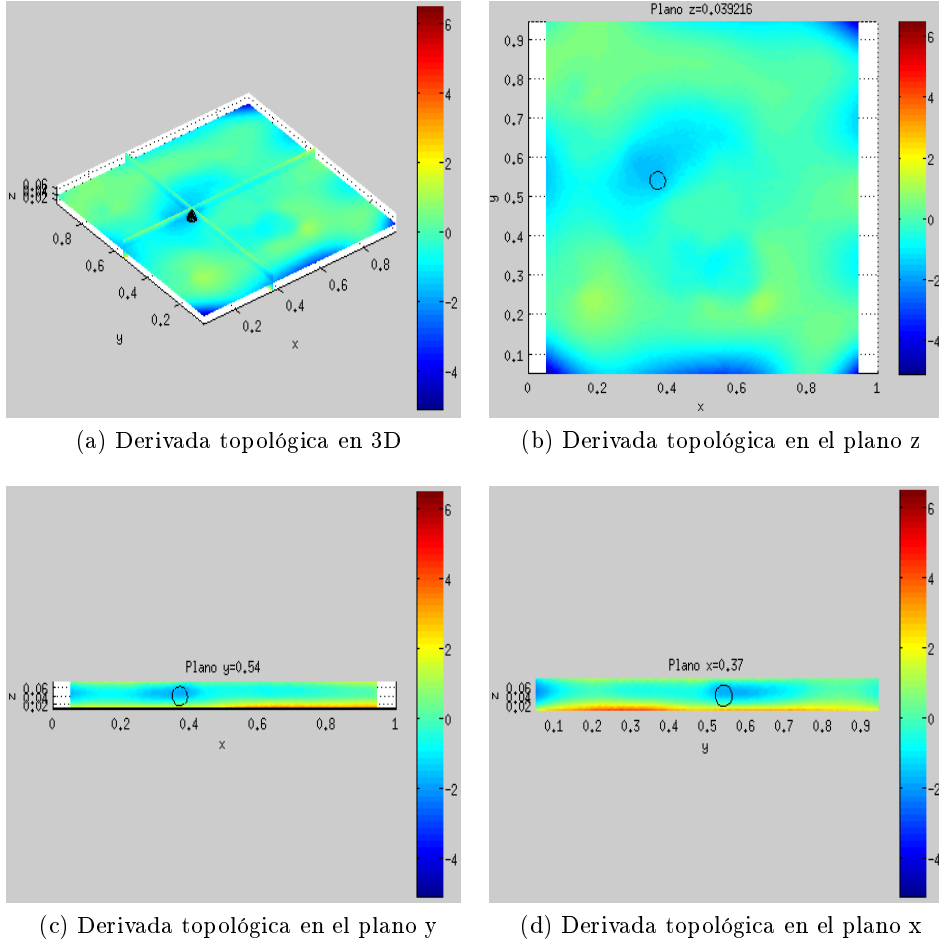


Figura 39: Ensayo multifrecuencia

Se puede observar en la Figura 39 que los resultados obtenidos resultan más satisfactorios que los anteriores, ya que en este caso resulta más clara la ubicación del defecto. En todas las vistas se puede apreciar que los valores negativos más pronunciados de la derivada topológica tienden a concentrarse sobre el defecto. También

se puede deducir que cuanto mayor sea el número de mediciones y de frecuencias utilizadas, los resultados que se obtendrán serán mejores, pudiendo llegar a definir de manera más precisa la forma y el tamaño del defecto.

Queda pendiente para estudios posteriores el realizar un estudio más exhaustivo, en el que se considere un número mayor tanto de frecuencias como de emisiones. Sin embargo, este primer ensayo sirve como prueba de concepto alentadora.

7. Conclusiones

En este apartado se van a resumir las conclusiones extraídas tras la realización de este proyecto. Debe recordarse que el objetivo principal era crear un simulador capaz de resolver de forma numérica el problema de Navier-Cauchy, y así permitir una posterior implementación de la derivada topológica.

A partir de los resultados obtenidos puede concluirse lo siguiente:

- Se ha puesto a punto un simulador numérico válido para cualquier problema de elasticidad lineal, independientemente de la forma y tamaño del dominio, o del número, tamaño y localización de los defectos inmersos en el mismo.
- Todos los software empleados, a excepción de *MatlabTM*, son de código abierto, lo cual permite gran versatilidad.
- La flexibilidad del código empleado es un hecho digno de mención, puesto que permite situar los palpadores de múltiples maneras (en distinto número, posición y forma), además de permitir operar con técnicas multifrecuencia. Esto posibilita la detección de defectos en medios finitos de una manera precisa.
- Los tiempos de computación necesarios para los ensayos no resultan demasiado elevados (desarrollándose estos en un sólo núcleo del clúster), empleándose para cada uno de ellos tiempos del orden de una hora. Estos tiempos de cálculo podrían reducirse considerablemente utilizando, por ejemplo, el método de descomposición modal, y optimizando algunas partes del código generado. Queda pendiente para trabajos futuros realizar estas optimizaciones.
- Las frecuencias empleadas no tienen por qué ser del orden de los ultrasonidos, puesto que tal y como se aprecia en este proyecto, el uso de frecuencias bajas apunta hacia una correcta localización del defecto. En métodos de óptica geométrica estas frecuencias no resultarían válidas.
- Se puede apreciar que la implementación de la derivada topológica en este código suministra una buena aproximación inicial a la localización del defecto con muy pocos datos de entrada.

Por todo ello, se espera que lo estudiado en este proyecto pueda resultar ciertamente productivo, de cara a su posible aplicación como método de detección de defectos, tanto en la industria aeronáutica, como en otras áreas.

8. Trabajos futuros

Una vez expuesto el trabajo desarrollado, y extraídas las conclusiones pertinentes con respecto a éste, añadiremos a continuación algunos posibles desarrollos futuros:

- Optimización del número y posicionamiento de los palpadores empleados en la detección de defectos.
- Optimización del número de frecuencias empleadas para la detección adecuada del defecto mediante técnicas multifrecuencia.
- Optimización del código generado para reducir el tiempo de ejecución.
- Estudio para la detección de varios defectos dentro de una misma placa.
- Estudio de otras formas de definir los pesos de las derivadas topológicas que pueden ayudar a conseguir mejores detecciones utilizando la misma colección de datos medidos.
- Modelización del amortiguamiento dentro de la ecuación de Navier-Cauchy para conseguir una mayor fidelidad con la realidad.
- Aprovechamiento del software multifísico *Elmer* para poder simular otras condiciones de contorno más realistas: humedad, variación de temperatura durante la medición, etc.
- Modelización correcta de los palpadores de tipo superficial mediante diferentes tipos de excitaciones.
- Anexión a este simulador de un módulo capaz de resolver problemas de transmisión y detectar los parámetros que definen el defecto (véanse [35, 7, 8]).
- Utilización de la derivada topológica empleando datos reales medidos por Aernova, en lugar de utilizar aquellos que se generan numéricamente a través de un simulador del problema directo.

Referencias

- [1] ACHENBACH, J. D. “*Wave propagation in elastic solids*”, vol. 16, North-Holland, Amsterdam . London, 1973.
- [2] ALBERTY, J., CARSTENSEN, C., FUNKEN, A., AND KLOSE, R. “*Matlab implementation of the finite element method in elasticity*”, Computing 69, pp. 239-263, 2002.
- [3] ALOTAIB, A., ATLURI, S.-N., LEITING, D., AND ZHANG, T. “*Application of the MLPG mixed collocation method for solving inverse problems of linear isotropic/anisotropic elasticity with simply/multi-connected domains*”, CMES Comp. Model. Eng. Sci. 94, pp. 1-28, 2013.
- [4] AMMARI, H., GUADARRAMA, L., KANG, H., AND LEE, H. “*Transient elasticity imaging and time reversal*”, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 141, pp. 1121-1140, 2011.
- [5] APEL, TH., MILDE, F., AND THESS, M. “*An elasticity benchmark in three dimensions*”, SPC-PM Po 3D, TU Chemnitz-Zwickau, 1995.
- [6] BATHE, K.-J. “*Finite element procedures*”, Prentice Hall, 2nd edition, 1995.
- [7] BOJAN, B., GUZINA, B.B., AND CHIKICHEV, I. “*From imaging to material identification: a generalized concept of topological sensitivity*”, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier. July, 2006.
- [8] BOJAN, B., GUZINA, B.B., AND CHIKICHEV, I. “*Generalized topological derivative for the Navier equation and inverse scattering in the time domain*”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Elsevier. May, 2008.
- [9] BOURGEOIS, L., AND LUNÉVILLE, E. “*On the use of the linear sampling method to identify cracks in elastic waveguides*”, Inverse Problems 29, art. num 025017, 2013.
- [10] BURGER, M., HACKL, B., AND RING, W. “*Incorporating topological derivatives into level set methods*”, Journal of Computational Physics 194, pp. 344-362, 2004.
- [11] CANO, A., GÜEMES, A., AND VALERIJAN, D. “*Detección de impactos con radar estructural*”, Proyecto Fin de Carrera, E.T.S. Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid. Aernnova Engineering. Octubre, 2010.
- [12] CARPIO, A., AND RAPÚN, M.-L. “*Hybrid topological derivative and gradient-based methods for electrical impedance tomography*”, Inverse Problems 28, Art. num. 095010, 2012.
- [13] CARPIO, A., AND RAPÚN, M.-L. “*Domain reconstruction using photothermal techniques*”, J. Comp. Phys. 17, pp. 8083-8106, 2008.
- [14] CARPIO, A., AND RAPÚN, M.-L. “*Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative methods*”, Inverse Problems 24, Art. num. 045014, 2008.

- [15] CARPIO, A., AND RAPÚN, M.-L. “*Hybrid topological derivative-gradient based methods for nondestructive testing*”, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013, Article ID 816134.
- [16] CARPIO, A., AND RAPÚN, M.-L. “*Parameter identification in photothermal imaging*”, J. Math. Imaging Vis. 49, pp. 273-288, 2014.
- [17] CHELLAMUTHU, K. C., AND IDA, N. “*A posteriori element by element local error estimation technique and 2D & 3D adaptive finite element mesh refinement*”, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 30, n. 5, pp. 3527-3530, 1994.
- [18] COOK, W. A., AND OAKES, W. R. “*Mapping methods for generating three-dimensional meshes*”, Computers in Mechanical Engineering, vol. August, pp. 67-72, 1982.
- [19] DÍAZ, A. “*Métodos de mallado y algoritmos adaptativos en dos y tres dimensiones para la resolución de problemas electromagnéticos cerrados mediante el método de los elementos finitos*”, PhD Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, E.T.S. Ingenieros de Telecomunicación, Departamento de Comunicaciones, Febrero 2000. Valencia, España.
- [20] DOMÍNGUEZ, V., AND RAPÚN, M.-L. “*Matlab en cinco lecciones de numérico*”, Departamento de Publicaciones, Universidad Pública de Navarra. Febrero, 2006.
- [21] ELLABIB, A., AND NACHEOUI, A. “*An iterative approach to the solution of an inverse problem in linear elasticity*”, Math. Comput. Simulation 77, pp. 189-201, 2008.
- [22] ESCHENAUER, H.-A., KOBOLEV, V.-V., AND SCHUMACHER, A. “*Bubble method for topology and shape optimization of structures*”, Structural Optimization 8, pp. 42-51, 1994.
- [23] ESPARTA, J.-E., AND GIUSTI, S.-M. “*Topological derivatives for thermo-mechanical semi-coupled system*”, 10th World Congress on Computational Mechanics. July, 2012.
- [24] FEIJOO, G.-R. “*A new method in inverse scattering based on the topological derivative*”, Inverse Problems 20, pp. 1819-1840, 2004.
- [25] FUNES, J.-F. “*Detección de defectos en estructuras mediante técnicas de sensibilidad topológica*”, Trabajo de Investigación, Universidad Politécnica de Madrid, 2014.
- [26] GEORGE, P.-L., AND FREY, P. “*Mesh generation*”, Hermes, Lyon, 2000.
- [27] GEUZAIN, C., AND REMACLE, J.-F. “*Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 79, Issue 11, pp. 1309-1331, 2009.

- [28] GIURGIUTIU, V. “*Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*”, Elsevier, 2008.
- [29] GIURGIUTIU, V., AND CUC, A. “*Embedded non-destructive evaluation for structural health monitoring, damage detection, and failure prevention*”, Sock and Vibration Digest, 37(2): p. 83-105. 2005.
- [30] GIUSTI, S.-M., SOKOLOWSKI, J., AND STEBEL, J. “*On topological derivative for contact problem in elasticity*”, Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional de Córdoba, Argentina. Septiembre, 2012.
- [31] GOLDSTEIN, E., POOLE, C., JR., AND SAFKO, J. “*Classical mechanics*”, Addison Wesley, 3rd edition, 2001.
- [32] GÓMEZ-ULLATE, Y. “*Estudio de sistemas ultrasónicos basados en multitransductores para la detección de defectos en estructuras tipo placa*”, PhD thesis, E.T.S. Ingenieros Industriales, UPM, 2007. Madrid, España.
- [33] GUARÍN, N., AND GÓMEZ, J.-D. “*Simulación numérica de problemas de propagación de ondas: dominios infinitos y semi-infinitos*”, Universidad EAFIT, Escuela de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil, 2012. Medellín, Colombia.
- [34] GÜEMES, A. “*SHM technologies and applications in aircraft structures*”, 5th International Symposium on NDT in Aerospace, 2013.
- [35] GUZINA, B.B., AND BONNET, M. “*Topological derivative for the inverse scattering of elastic waves*”, Q. Jl Mech. Appl. Math., Oxford University, pp. 161-179, 2004.
- [36] HECHT, F., PIRONNEAU, O., AND OHTSUKA, K. “*FreeFem++: manual*”. August, 2002.
- [37] HEINTZ, D. “*Model Adaptivity in Elasticity*”, PhD Thesis, Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, 2008. ISSN 1652-9715.
- [38] HUGHES, T.J.R. “*The finite element method: linear static and dynamic finite elements analysis*”, Dover Publications, 2000.
- [39] LAMB, H. “*On waves in an elastic plate*”, Proceedings of the Royal Society. March, 1917.
- [40] LANDAU, L. Y LIFSHITZ, Y. M. “*Teoría de la elasticidad*”, volumen 7 de Curso de Física Teórica, Editorial Reverte, 6a edición, 1982.
- [41] MEIS, M., AND VARAS, F. “*Simulación numérica multifísica*”, Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Vigo, España. Curso A Coruña, España. Junio, 2011.

- [42] MONKHOUSE, R.-S., WILCOX, P.-W., LOWE, M., DALTON, R. P., AND CAWLEY, P. “*The rapid monitoring of structures user interdigital Lamb wave transducers*”, IOP Science, 2000.
- [43] MOORE, H. “*Matlab para ingenieros*”, Prentice Hall Mexico. 2007.
- [44] NOVOTNY, A.-A., FEIJÓO, R.-A., TAROCO, E., AND PADRA, C. “*Topological sensitivity analysis for three-dimensional linear elasticity problem*”, Laboratorio Nacional de Computación Científica, Brasil. September, 2005.
- [45] PARK, W.-K. “*Multi-frequency topological derivative for approximate shape acquisitive of crack-like thin electromagnetic inhomogeneities*”, J. Math. Anal. Appl. 404, pp. 501-518, 2013.
- [46] PARK, W.-K. “*Analysis of multi-frequency electromagnetic imaging functional of thin, crack-like electromagnetic inclusions*”, Applied Numerical Mathematics 77, pp. 31-42, 2014.
- [47] PERALES, J.-M., RAPÚN, M.-L., AND VEGA, J.-M. “*Domain reconstruction using multifrequency topological sensitivity*”. Preprint, 2014.
- [48] PÉREZ, A. “*Optimización topológica de problemas elásticos planos utilizando el método de los elementos de contorno*”, Universidad Mar del Plata, Argentina. Octubre, 2006.
- [49] PÉREZ, C.-A. “*Elaboración de procedimientos de inspección con ultrasonido en el material de instalaciones de recepción, almacenamiento y bombeo de petróleo y sus derivados, elaboración de un plan de mantenimiento preventivo; correctivo del material de las instalaciones*”, Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Mecánica, Julio 2009. Quito, Ecuador.
- [50] PREGO-BORGES, J. L. “*Lamb: A simulation tool for air-coupled Lamb wave based ultrasonic NDE systems*”, PhD thesis, The Polytechnic University of Catalonia (UPC), Department of Electronic Engineering, September 2010. Barcelona, Spain.
- [51] REDDY, J.-N. “*Applied functional analysis and variational methods in engineering*”, Krieger Publishing, 1st edition, 1991.
- [52] ROSE, J.-L. “*Ultrasonic waves in solid media*”, Cambridge University Press, 1999.
- [53] RUOKOLAINEN, J. “*MATC manual*”, CSC - The Finnish IT Center for Science. Espoo, Finland. March 31, 2014.
- [54] SAYAS, F.-J. “*Modelos matemáticos en Mecánica*”, www.math.udel.edu/~fsayas/MMM.pdf
- [55] SOKOŁOWSKI, J., AND ZOLÉSIO, J.-P. “*Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis*”, Springer, Heidelberg, 1992.

- [56] SOLIE, L. P., AND AULD, B. A. “*Elastic waves in free anisotropic plates*”, J Acoust Soc Am, 54, (1), pp. 50-65, 1973.
- [57] TIMOSHENKO, S., AND GOODIER, J.-N. “*Theory of elasticity*”, McGraw-Hill, 3a edición, 1970.
- [58] TOKMASHEV, R., TIXIER, A., BOJAN, B., AND GUZINA, B. “*Experimental validation of the topological sensitivity approach to elastic-wave imaging*”, IOP Publishing Science. November, 2013.
- [59] VALEGAS, D., FRITZIER, C.-P., AND GÜEMES, A. “*Structural health monitoring*”, Iste, 2006.
- [60] VARAS, F. “*Free software for scientific computing*”, Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Vigo, España. Sevilla Numérica, Sevilla, España. Junio, 2011.
- [61] YAÑEZ, Y. M. “*Mejora del margen dinámico de sistemas de ensayos no destructivos mediante ondas de Lamb basados en agrupaciones cóncavas de transductores acoplados por aire*”, PhD thesis, The Polytechnic University of Catalonia (UPC), Department of Electronics, November 2008. Barcelona, Spain.
- [62] ZWINGER, T. “*ElmerSolver*”, CSC - Scientific Computing Ltd., The Finnish IT Center for Science. Espoo, Finland.
- [63] http://avstop.com/ac/Aviation_Maintenance_Technician_Handbook_General/8-22.html
- [64] <http://downloads.gphysics.net/UACH/Odontologia/UACH-Fisica-en-la-Odontologia-3-2-Ultrasonido.pdf>
- [65] <http://geuz.org/gmsh/doc/texinfo/#Overview>
- [66] <http://scipy-lectures.github.com>
- [67] <http://www.csc.fi/english/pages/elmer/documentation>
- [68] <http://www.elmerfem.org/forum/>
- [69] <http://www.elmerfem.org/wiki/>
- [70] <http://www.dma.uvigo.es/materiales.php?single&seccion=cursos&pagina=elmerfem>
- [71] http://www.ndted.org/EducationResources/CommunityCollege/Ultrasonics/cc_ut_index.htm
- [72] <http://www.paraview.org/>
- [73] http://www.visionlearning.com/library/module_viewer.php?mid=102&l=s